

## 1 目的

この実験課題ではクントの法則を用いて、気体中の音速、弾性棒を伝わる縦波の速さや弾性棒のヤング率を求め、実験結果について考察する。

## 2 原理

波の速さ  $v$  と波長  $\lambda$ 、振動数  $f$  の間には、

$$v = f\lambda \quad (1)$$

の関係が成り立つ。ある振動数で気柱が共鳴したとすると、気柱には定常波が生じる、円管の場合の共鳴条件はモード番号を  $j$ 、円管の直径を  $d$  とすれば、

$$\lambda_j \cdot j = \pi d \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

(1) 式を用いて式変形すると、

$$f_j = \frac{v}{\pi d} j \quad (3)$$

ここで  $f_j/j = a$  とおくと、音速  $v$  は

$$v = \pi da \quad (4)$$

となる。

なお、気体定数を  $R$ 、気体 1mol の質量を  $M$ 、気体の比熱比を  $\gamma$  とすると、絶対温度  $T$  と気体の音速  $v$  の間には次の関係が成り立つ。

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (5)$$

事前に円管の中に軽い粉をまいておくと定常波の腹にある粉は激しく動いて縞模様 (ridge) を作る。この模様の数から共鳴のモード番号を知ることができ、共鳴条件から定常波の波長を求めることができる。したがって、振動数が既知であれば (1) 式から音速を求めることができる。

伝統的なクントの実験では、伝播管中の粉末の動きが最も激しいと思われるところを目視により決定し、共鳴振動数として採用する。本実験では気体中の音速測定の際に、従来の方法に加えて共鳴曲線をプロットして共鳴振動数を決定する測定も行う。

コルク粉を少量入れたガラス管に金属棒を差し込み棒をこすると、縦振動の定常波が立ち、鋭い音を発する。この時、(3) 式が成立するようにガラス管を移動して気柱の長さを調整すれば共鳴して ridge が生じる。このようにして生じた ridge の間隔の平均値  $L_g$  を求めれば気柱内の定常波の波長  $\lambda_g$  は、

$$\lambda_g = 2L_g$$

から求めることができる。いま、空気中の音速  $v_g$  が既知量であるとすれば、気柱の振動数  $f_g$  は  $f_g = v_g/\lambda_g$  から求められる。棒と気柱は共鳴しているのであるから棒の縦振動の振動数  $f_g$  と気柱の振動数  $f_g$  は一致していなければならない。そこでモード番号  $i$  での波長を  $\lambda_{mi}$  とすれば、縦振動の速さ  $v_m$  は

$$v_m = \lambda_{mi} f_{mi} = \frac{v_g \lambda_{mi}}{2L_g} \quad (6)$$

と表すことができる。棒の縦振動の波長  $\lambda_{mi}$  は棒の長さを  $l_m$  とすれば、

$$\frac{\lambda_{mi}}{2}(2i-1) = l_m \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

のように表される。したがって、縦振動の速さ  $v_m$  は

$$v_m = \frac{v_g l_m}{(2i-1)L_g}$$

によって与えられる。また、棒素材のヤング率を  $E$ 、密度を  $\rho$  とすれば  $v_m$  との間に次式が成り立つ。

$$v_m = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

### 3 実験方法

#### 3.1 円管による気体中の音速測定

- 円管をできるだけ円に近づくようにして、金尺で直径を 5 箇所測った。
- スピーカ直下にあるフタを外し、管中の気体を空気と置換した。
- 発振器の周波数を変え、モード番号  $j = 1$  の共鳴をコルク粉の振動の様子から探した。最も激しく振動する周波数を  $j = 1$  での共鳴振動数として記録した。
- $j = 2, 3, 4, 5$  についても同様にして共鳴振動数を測定した。
- 横軸にモード番号  $j$  を縦軸にそのときの共鳴振動数  $f_j$  をとったグラフを作成した。

次に円管内に取り付けたマイクからの信号をオシロスコープに表示させ、各モードの共鳴振動数近辺で以下のような測定を行った。

- 先の実験で求めた  $j = 1$  共鳴振動数近辺で発振器の周波数を変え、オシロスコープに表示された音波波形の山谷間電圧  $V_{pp}$  が最大となる周波数を探した。
- 上の周波数から周波数を変えていき、その都度周波数と電圧  $V_{pp}$  を記録した。

- 横軸を振動数、縦軸を電圧をとったグラフに得られた測定値をプロットし共鳴曲線を作成した。
- $j = 2, 3, 4, 5$  についても同様にして共鳴曲線を作成した。
- 共鳴曲線のピークから求めた共鳴振動数をもとに、横軸にモード番号  $j$  を縦軸にそのときの共鳴振動数  $f_j$  をとったグラフを作成した。

### 3.2 閉端直管による縦波の速さとヤング率の測定

- ガラス管にコルク粉を入れ、あらかじめ 20 本ほどの輪ゴムを通しておく。
- 用意されている金属棒のうちから一つを選び、その長さ  $l_m$  を金尺で測定した。
- また金属棒と同じ材質の試料が用意されているので、体積と重さをノギス、マイクロメータ、電子天秤を使って計測した。

実験は以下の手順で行った。

- 棒の中央を木片で挟んで万力で固定した。
- 備え付けの雑巾に少量アルコールを湿らせ、棒の手前 1/4 程度を擦って縦振動を起こし、直管を少し動かして直管内の空気が棒の縦振動に共鳴する位置を探した。
- 金属棒の先端および、共鳴によって生じた ridge の中央に輪ゴムで目印をつけ、金尺で場所を読み取った。
- 以上を金属棒の種類を変えて繰り返し測定を行った。

## 4 実験結果

円管の直径  $d$  の測定値は次のようになった。

表 1: 円管の直径

| $d/\text{mm}$ |
|---------------|
| 585           |
| 590           |
| 594           |
| 592           |
| 580           |

円管の直径  $d$  の測定値の平均を  $\bar{d}$  とすると  $\bar{d} = 590.2 \text{ mm}$

ここで平均値  $\bar{d}$  の標準不確かさを  $\Delta\bar{d}$  とすると、

$$\Delta \bar{d} = \sqrt{\frac{1}{5(5-1)} \sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2} = 7.52 \cong 7 \text{ mm}$$

よって円管の直径は  $d = (590 \pm 7) \text{ mm}$  と求められる。

コルクの振動の目視により求めた共鳴振動数の測定値は次のようになった。

ここで  $j$  はモード番号、 $f_j$  はそのモード番号における共鳴振動数の値である。

表 2: 目視により求めた共鳴振動数

| $j$ | $f_j/\text{Hz}$ |
|-----|-----------------|
| 1   | 175.2           |
| 2   | 358.5           |
| 3   | 554.4           |
| 4   | 718.2           |
| 5   | 914.1           |

目視により決定した共鳴振動数の値をもとに横軸にモード番号  $j$  を縦軸にそのときの共鳴振動数  $f_j$  をとったグラフを作成し、そのグラフの傾きを  $a$  としたとき、その値は

$$a = \frac{914}{5} = 182.8 \text{ Hz}$$

となった。グラフの直線の式を  $Y = aX$  とすると傾き  $a$  の不確かさ  $\Delta a$  はテキスト 25 ページの次式で求められる。

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{X_0}\right)^2}$$

$X_0, Y_0, \delta X, \delta Y$ , はグラフより決定される値でそれぞれ  $X_0 = 5, Y_0 = 914, \delta X = 0.04, \delta Y = 7.8$  となるので  $\Delta a$  は,

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{12.5}{935}\right)^2 + \left(\frac{0.04}{5}\right)^2} = 1.37 * 10^{-4}$$

この計算より、 $\Delta a = 0.125$  よって  $a = (182.8 \pm 0.1) \text{ Hz}$  となった。

(4) 式より空気中の音速は  $v = \pi da = 3.14 \times 590 \times 175 = 324369.44 \text{ mm/s}$

音速の不確かさを  $\Delta v$  とするとその値は,

$$\Delta v = v \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}$$

$$\Delta v = 324369.44 \times \sqrt{\left(\frac{0.12}{182}\right)^2 + \left(\frac{7}{590}\right)^2} = 3854.384... \text{ mm/s} \cong 3 \text{ m/s}$$

したがってクントの実験から音速  $v$  は  $v = (324 \pm 3) \text{ m/s}$  と求められる。

#### 4.1 共鳴曲線による音速測定

各モードにおける共鳴振動数付近での周波数とマイクの電圧の測定値は次のようになった.

表 3: モード 1 の測定値

| $f/\text{Hz}$ | $V/\text{mV}$ |
|---------------|---------------|
| 156.1         | 179.4         |
| 158.8         | 211.1         |
| 166.0         | 353.0         |
| 168.6         | 426.6         |
| 171.3         | 496.7         |
| 173.7         | 535.2         |
| 175.3         | 543.0         |
| 177.0         | 539.0         |
| 180.0         | 484.2         |
| 182.1         | 441.7         |
| 184.9         | 386.4         |
| 191.8         | 281.4         |
| 206.1         | 187.9         |

表 4: モード 2 の測定値

| $f/\text{Hz}$ | $V/\text{mV}$ |
|---------------|---------------|
| 312.7         | 378.1         |
| 321.2         | 457.5         |
| 329.1         | 535.4         |
| 334.8         | 582.7         |
| 343.5         | 630.7         |
| 345.5         | 636.2         |
| 346.1         | 637.4         |
| 348.1         | 640.0         |
| 349.9         | 641.0         |
| 350.5         | 638.4         |
| 352.8         | 636.9         |
| 354.2         | 634.9         |
| 356.6         | 630.7         |
| 359.3         | 622.9         |
| 368.9         | 584.4         |
| 371.9         | 572.6         |
| 378.3         | 549.0         |
| 417.6         | 449.8         |

表 5: モード 3 の測定値

| $f/\text{Hz}$ | $V/\text{mV}$ |
|---------------|---------------|
| 451.5         | 427.4         |
| 486.4         | 458.5         |
| 504.3         | 493.7         |
| 515.1         | 517.3         |
| 523.9         | 535.4         |
| 534.1         | 551.5         |
| 539.7         | 556.3         |
| 541.6         | 557.0         |
| 547.0         | 557.8         |
| 549.0         | 557.5         |
| 550.5         | 557.0         |
| 551.3         | 557.5         |
| 554.5         | 554.5         |
| 556.9         | 553.3         |
| 558.1         | 552.0         |
| 559.0         | 551.5         |
| 561.4         | 547.2         |
| 564.3         | 542.5         |
| 568.9         | 532.7         |
| 572.3         | 523.1         |
| 584.0         | 486.2         |
| 589.0         | 469.6         |
| 600.9         | 431.4         |

表 6: モード 4 の測定値

| $f/\text{Hz}$ | $V/\text{mV}$ |
|---------------|---------------|
| 685.4         | 326.4         |
| 694.4         | 346.5         |
| 707.2         | 392.7         |
| 716.1         | 422.4         |
| 728.3         | 457.8         |
| 734.9         | 472.4         |
| 739.5         | 479.9         |
| 740.6         | 480.4         |
| 742.4         | 481.9         |
| 743.8         | 482.4         |
| 744.2         | 482.4         |
| 745.3         | 483.2         |
| 746.4         | 482.4         |
| 748.5         | 480.4         |
| 751.8         | 475.4         |
| 755.2         | 468.3         |
| 758.5         | 458.0         |
| 766.5         | 429.2         |
| 777.3         | 381.7         |
| 788.5         | 334.4         |



表 7: モード 5 の測定値

| $f/\text{Hz}$ | $V/\text{mV}$ |
|---------------|---------------|
| 871.3         | 283.7         |
| 876.1         | 296.2         |
| 881.5         | 313.1         |
| 895.1         | 364.1         |
| 902.5         | 391.2         |
| 909.3         | 409.8         |
| 911.5         | 413.6         |
| 913.4         | 416.6         |
| 914.7         | 417.3         |
| 916.5         | 418.6         |
| 917.1         | 419.4         |
| 919.1         | 418.6         |
| 920.2         | 417.8         |
| 923.1         | 415.8         |
| 924.0         | 414.6         |
| 928.0         | 406.3         |
| 937.0         | 378.1         |
| 948.6         | 335.4         |
| 958.1         | 302.8         |

共鳴曲線のピークから求めた共鳴振動数は表 8 の通りとなった。

共鳴曲線により決定した共鳴振動数の値をもとに横軸にモード番号  $j$  を縦軸にそのときの共鳴振動数  $f_j$  をとったグラフを作成し、そのグラフの傾きを  $a$  としたとき、その値は

$$a = \frac{917 - 0}{5 - 0} = 183.4 \text{ Hz}$$

となった。グラフの直線の式を  $Y = aX$  とすると傾き  $a$  の不確かさ  $\Delta a$  は次式で求められる。

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{X_0}\right)^2}$$

$X_0, Y_0, \delta X, \delta Y$ , はグラフより決定される値でそれぞれ  $X_0 = 5, Y_0 = 917, \delta X = 0.06, \delta Y = 10.4$  となるので  $\Delta a$  は,

$$\Delta a = 183.9 \times \sqrt{\left(\frac{10.4}{917}\right)^2 + \left(\frac{0.06}{5}\right)^2} = 3.0364... \cong 3 \text{ Hz}$$

表 8: 共鳴曲線のピークから求めた共鳴振動数

| $j$ | $f_j/\text{Hz}$ |
|-----|-----------------|
| 1   | 175.3           |
| 2   | 349.9           |
| 3   | 550.5           |
| 4   | 744.2           |
| 5   | 917.1           |

よって  $a = (1.83 \pm 0.03) \times 10^2 \text{ Hz}$  と導かれる.

(4) 式より空気中の音速は  $v = \pi da = 3.14 \times 590 \times 175 = 324369.44 \text{ mm/s}$

音速の不確かさを  $\Delta v$  とするとその値は,

$$\Delta v = v \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}$$

$$\Delta v = 324369.44 \times \sqrt{\left(\frac{3.03}{183.9}\right)^2 + \left(\frac{7}{590}\right)^2} = 6585.85... \text{ mm/s} \cong 6 \text{ m/s}$$

したがって共鳴曲線から音速  $v$  は  $v = (3.24 \pm 0.06) \times 10^2 \text{ m/s}$  と求められた。

## 4.2 金属棒 (1)

共鳴が観測された場所は、直管のコルクのないほうの端から以下の距離の場所だった。

表 9: 金属棒 1 の時の共鳴した場所

| mm   |
|------|
| 87   |
| 208  |
| 349  |
| 485  |
| 619  |
| 767  |
| 890  |
| 1034 |

また、コルクの場所は 1355mm、棒の長さは 1177mm、同一材質の金属柱の長さは 69.3mm、直径は 12.45mm、質量は 65.85g であった。計算より、この金属の密度は 7.82 である。

音の速さは  $v$  は  $v =$  前の実験より  $(3.2 \pm 0.06) \times 10^2$  m/s と求められているので、計算より、ridge の感覚の平均は 134mm であったので、 $\lambda_g = 268\text{mm}$  であり、 $f_g = \frac{320}{0.268} = 1194[\text{hz}]$  である。また、コルクまでの距離から考えて、この振動のモード番号は 9 であるから、(6) 式より、縦振動の速さ  $v_m$  は  $v_m = \frac{324 \times 1177}{17 \times 134} = 167.4 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$  であり、ヤング率  $E$  は、 $E = \frac{v_m^2}{\rho} = 219.1 [\text{GPa}]$  と、求められた。

表 10: 金属棒 2 の測定結果

| 密度 $\rho/\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ | 棒の長さ $l_m/\text{mm}$ | ridge の間隔 $L_g/\text{mm}$ | 縦振動の速さ $v_m/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ | ヤング率 $E/\text{GPa}$ |
|---|----------------------|---------------------------|---|---------------------|
| 7.82                                    | 1177                 | 134                       | 167.4                                     | 219.1               |

### 4.3 金属棒 (2)

表 11: 金属棒 2 の時の共鳴した場所

| mm   |
|------|
| 181  |
| 272  |
| 377  |
| 485  |
| 594  |
| 705  |
| 803  |
| 908  |
| 1010 |
| 1116 |

また、コルクの位置は 1297mm、棒の長さは 1170mm、同一材質の金属柱の長さは 72.35mm、直径は 11.88mm、質量は 71.53g だった。計算より、この金属の密度は 8.80 である。

音の速さは  $v$  は  $v =$  前の実験より  $(3.2 \pm 0.06) \times 10^2$  m/s と求められているので、計算より、ridge の間隔の平均は 103mm であったので、 $\lambda_g = 268\text{mm}$  であり、 $f_g = \frac{320}{0.206} = 1553[\text{hz}]$  であった。

また、コルクまでの距離から考えて、この振動のモード番号は 12 であるから、(6) 式より、縦振動の速さ  $v_m$  は  $v_m = \frac{324 \times 1170}{23 \times 103} = 160.0 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$  であり、ヤング率  $E$  は、 $E = \frac{v_m^2}{\rho} = 225.3 [\text{GPa}]$  と、求められた。

表 12: 金属棒 2 の測定結果

| 密度 $\rho/\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ | 棒の長さ $l_m/\text{mm}$ | ridge の間隔 $L_g/\text{mm}$ | 縦振動の速さ $v_m/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ | ヤング率 $E/\text{GPa}$ |
|---|----------------------|---------------------------|---|---------------------|
| 8.80                                    | 1170                 | 103                       | 160.0                                     | 225.3               |

## 5 考察

今回の実験を行った際の室内の気温は 23.6 度であったので、音速を計算で求めると [2]、理論値は  $331.45 + 0.607 \times 23.6 = 345.7 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$  であった。クントの実験から音速  $v$  は  $v = (324 \pm 3) \text{ m/s}$  と求められ、共鳴曲線から音速  $v$  は  $v = (324 \pm 6) \text{ m/s}$  と求められたことから考えると、だいぶ実際の値からは外れてしまっている。この誤差の原因として考えられることとしては、部屋に空調が利いていて温度計と実際の値に差があったこと、あるいはオシロスコープの数値が揺れ動いていたことによる誤差が多すぎたことが考えられる。

### 5.1 金属棒の推察

金属棒 1 の密度は  $7.82 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  ヤング率は  $219.1 \text{ GPa}$ 、金属棒 2 の密度は  $8.80 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  ヤング率は  $225.3 \text{ GPa}$  であった。

これらから推測すると、金属棒 1 は鉄 ( $7.874 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $219.2 \text{ [GPa][3]}$ )、金属棒 2 はニッケル ( $8.96 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,  $211.4 \text{ [GPa][3]}$ ) であると推測できる。候補にはステンレスや青銅などの合金もあったが、製法や純度によって値が大きく異なるので断言はできなかった。

## 6 参考文献

[1] 基礎科学実験 A(物理学実験) 平成 29 年度版 [2] 理科年表 平成 31 年度版 p.443 [3] 理科年表 平成 31 年度版 p.397,388