

1 目的

エアトラックにおける物体の直線運動を観測して、わずかに存在する空気抵抗を求める。また他物体との衝突を観測して力学的な考察を定量的に行う。

2 原理

一直線上を滑走する物体の運動は、その減速の原因として (1) 摩擦 (係数 μ) (2) 速度に比例する空気の粘性抵抗 (係数 λ) (3) 速度の二乗に比例する空気の慣性抵抗 (係数 K)、を考えると、次の運動方程式で記述される。

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \cos\theta - \lambda v - K v^2 \pm mg \sin\theta \quad (1)$$

ここで m は滑走体の質量、 g は重力加速度、 θ は水平からの直線の傾き角、 \mp の $+$ は滑走体が行くとき、 $-$ は上るときに相当する。この実験では以下に述べるような方法を用いて滑走体の運動を解析し、 μ 、 λ 、 K を決定する。

2.1 平均速度と平均加速度

滑走体がある地点を通過する速度を v_1 、そこから距離 s だけ離れた地点を通過する速度を v_2 とすると、両所感の平均の速度 \bar{v} と減速の平均の加速度 \bar{a} は、それぞれ

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \bar{a} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2s} \quad (2)$$

である。(1) 式によると次の関係式が成り立つ。

$$\bar{a} = \mu g \cos\theta + \frac{\lambda}{m} \bar{v} + \frac{K}{m} \bar{v}^2 \mp g \sin\theta \quad (3)$$

この式の両辺を g で割ると、

$$\bar{a}/g = \mu \cos\theta + \frac{\lambda}{mg} \bar{v} + \frac{K}{mg} \bar{v}^2 \mp \sin\theta \quad (4)$$

これを $\frac{\bar{a}}{g}$ を縦軸、 \bar{v} を横軸にとってグラフを書くと、グラフの形は放物線である。もしも摩擦がなければ、水平の場合 ($\theta = 0$) には放物線は原点を通る。滑走台が微小角 θ だけ傾いている場合、滑走する方向によって上り坂か下り坂になるため、グラフは上下に $\sin\theta \approx \theta$ ずれた放物線になる。

2.2 λ, K の決定

一般にエアトラックではよい近似で $\mu = 0$ なので、滑走台が水平の場合は滑走台での運動は次の式で近似できる。

$$\bar{a} = \frac{\lambda}{m} \bar{v} + \frac{K}{m} \bar{v}^2 \quad (5)$$

この式の両辺を \bar{v} で割ると

$$\frac{\bar{a}}{\bar{v}} = \frac{\lambda}{m} + \frac{K}{m}\bar{v} \quad (6)$$

$\frac{\bar{a}}{\bar{v}}$ を縦軸に、 \bar{v} を横軸にとってグラフを書くと、(11,3) 式は $\frac{\lambda}{m}$ を切片とし、 $\frac{K}{m}$ を勾配とする直線となる。

2.3 反発係数

滑走体が水平な滑走台の端に衝突して反発する前後の速さ v, V を測って衝突用板バネとの反発係数 ε を求める。端から距離 d のところで衝突前の速さ v を測り、端から距離 D のところで衝突後の速度 V を測るものとする、反発係数は次の式で計算される。

$$\varepsilon = \frac{V + D(\lambda + KV)/m}{v - d(\lambda + Kv)/m} \quad (7)$$

3 実験方法

以下のような手順で実験を行った。

3.1 実験準備

- 滑走体の速度を計測するために、発光ダイオードとフォトトランジスタによる検出素子がついたスタンドが二つある。これらのスタンドを 80cm から 1m 離して滑走台と直角になるようにセットする。また、検出素子と滑走体が接触しないようにする。
- 左右のカウンタの電源をいれ、滑走体が通過する時間が表示されるのを確認する。
- 滑走台や滑走体に付着しているごみをアルコールを浸したティッシュでふき取る。
- 滑走台左端にあるリングを用い、滑走台との隙間が左右で等しくなるように調整し、滑走台と直角な方向についての水平を取る。
- 送風機を起動して滑走台に空気を送る。
- 滑走体を滑走台に置き、二つのスタンドの間を行き来するように滑走方向の水平を取る。

3.2 滑走速度の測定

滑走体についている羽の長さ Δs と二つの検出素子の間の距離 s を測定する。滑走体を左右に走らせて、距離 s だけ離れた 2 点において羽が通過する時間 $\Delta t_1, \Delta t_2$ でも測定し、速度 v_1, v_2 を求めた。また、速度や時間、平均速度、平均加速度などは表にまとめることにした。

3.3 滑走台の水平調整

得られたデータを計算し、縦軸が $\frac{\bar{a}}{g}$ 、横軸が \bar{v} のグラフを左右向きそれぞれで作成して、二つのグラフの上下の差の半分 ($2 \sin \theta \approx 2\theta$) により、滑走台の傾きを求める。まず滑走台の両足の間隔 L を測定し、滑走台を水平にするのに台をどれだけ高く（または低く）するのかを計算する。その数値と調整ねじのピッチから、何度回せばいいのかを計算する。水平調整を行わなければならないかどうかは、描いたグラフから判断することにした。

4 実験結果

実験結果の表は以下のようになった。

表 1 右向きに走らせた際のデータ

$\delta t_1/\text{s}$	$\delta t_2/\text{s}$	$v_1/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$v_2/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$\bar{v}/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$\bar{a}/\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$	$\frac{\bar{a}}{g}$	$\frac{\bar{a}}{\bar{v}}/\text{s}^{-1}$
55.78	56.42	107.57	106.35	106.96	1.578	0.161	0.0148
77.74	79.68	75.18	75.87	76.53	1.212	0.124	0.0158
92.64	94.27	64.77	63.65	64.21	0.8696	0.0887	0.0135
139.88	143.69	42.89	41.76	42.33	0.5783	0.0590	0.0137
178.48	182.99	33.62	32.79	33.21	0.3332	0.0340	0.0100
235.90	242.28	25.43	24.76	25.10	0.2035	0.0208	0.0081

表 2 左向きに走らせた際のデータ

$\delta t_1/\text{s}$	$\delta t_2/\text{s}$	$v_1/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$v_2/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$\bar{v}/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$\bar{a}/\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$	$\frac{\bar{a}}{g}$	$\frac{\bar{a}}{\bar{v}}/\text{s}^{-1}$
53.44	55.95	111.86	107.24	109.55	6.120	0.624	0.0559
82.48	86.91	72.75	69.04	70.90	3.180	0.324	0.0489
98.51	104.52	60.91	57.41	59.16	2.504	0.256	0.0423
134.86	145.77	44.49	41.16	42.83	1.724	0.176	0.0403
171.13	188.63	35.01	31.81	33.41	1.293	0.132	0.0387
233.56	269.53	25.69	22.26	23.98	0.994	0.101	0.0417

また、滑走体の重量は $40.8 [g]$ 、滑走体の接地面積は $67.9 [cm^2]$ 、滑走体正面の表面積は $3.50 [cm^2]$ であった。また、(2) 式に基づいたグラフを図 1、水平調整に用いたグラフを図 2 として添付している。課題 1,1: 図 1 と (2) 式によると、 $\frac{\lambda}{m} = 0.067 \text{ s}^1 \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{g}^1$ 、 $\frac{K}{m} = 1.176 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2 \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{g}^{-1}$ なので、 $\lambda = 2.73 \text{ s}^1 \cdot \text{cm}^{-2}$ 、 $K = 0.0048 \text{ s}^2 \cdot \text{cm}^{-3}$ という値が求まった。課題 1,2: 初速は $v = 100 [cm]$ 、 $t = 0$ のとき $x = 0 [cm]$ であるので、テキストの p.106 の (11,20) 式より [1]、

$$x = \frac{m}{K} \times \log \frac{\lambda + 100 \times K}{\lambda}$$

となるので、求まった値を代入して計算すると、

$$\frac{42.5}{0.0048} \log_e \frac{2.73 + 0.0048 \times 100}{2.73 + 0} = 1377.29$$

よって、13.77 m の距離を動く と推測できる。実際には 10 往復以上、つまり 20m 以上の距離を動いていたため、データが不足していて精度が高くないからであると考えられる。課題 1.3: 参考文献として用いた理科年表では、空気の粘性率は 20 度で $17.3 \cdot 10^{-6} [Pa \cdot s]$ あり、50 度で

$19.6. \times 10^{-6} [Pa \cdot s]$ であるため [2]、この場合は 20 度の方の数値を利用すると、教科書の計算式から、

$$d = \frac{17.3 \times 10^{-6} \times 67.9}{2.73} = 4.3. \times 10^{-4}$$

と求められた。

また、この先のデータは時間が足りず、データをとれなかったために計算できなかった。

5 考察

まず最初に、この実験には参照できる実測値がないため、この求めた値が正常なのかを判定することができない。そのうえで、今回の実験がうまくいったのかどうかを考える。書きあがったグラフはどちらもテキストの図と同じ形になり、また多少の外れ値こそあれ大きくずれた値や、明らかにおかしい値はなく、また滑走体が外れたりもしなかったため、自信はないが実験は成功したといえる。さらに、 $\frac{\bar{a}}{g}$ の値はおおむね \bar{v} と比例関係を持っていた。しかし、授業中にトラブルがあって実験開始が遅れたとはいえ、いくつかのデータを取り損ねていたり、あと少しで実験の手順を無視するところであったりと反省する部分が多かった。次回の実験では十全な準備をしたうえで臨みたい。

参考文献

[1] 基礎科学実験 A(物理学実験) 2019 年版

[2] 理科年表 平成 31 年度版 p.395