

1 目的

ボルダの振り子を用いて振り子の周期を精密に測定する事により、重力加速度を 4 桁の精度で測定する。

2 原理

2.1 振り子の周期

鉛直線を含む平面上振動する単振り子を考える。振り子の長さを h とすると、その周期 T は次式で表される。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \quad (1)$$

この式を変形すると次式となり、振り子の周期 T を測ることによって重力加速度を求めることができる。

$$g = \frac{4\pi^2 h}{T^2} \quad (2)$$

振り子の長さを $h = 1 \text{ m}$ とすると、周期は約 2 秒になる。振り子の長さを不確かさ 1 mm 以内の精度で測るのは容易である。しかしストップウォッチなどを用いて周期を測定した場合、周期の不確かさは 1/200 程度であり g を求める式の中に周期は 2 乗の形で入っているので g の不確かさは 1/100 となる。この方法では g に対して 0.1 m/s^2 ほどの不確かさが生じることになる。

この例より、 g をより精密に測るためには周期をもっと高精度で測定する必要がある。

2.2 周期の精密測定

約 2 秒の周期で振動している振り子を正確に $T_0 = 2 \text{ s}$ 毎の光パルスで照明するとする。薄暗い視野の中で振動を観測すると振り子の周期 T が正確に $T_0 = 2 \text{ s}$ でないとすると、2 秒ごとに光パルスで照らされているときの位置は少しずつずれていく。

望遠鏡でのぞいていると 2 秒ごとに輝く金属線が視野の中を長い周期で左右に往復する。この長い周期 τ を測ると振り子の周期 T は次式から求めることができる。

$$\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} = \frac{\pm 1}{\tau} \quad (3)$$

$$T = T_0 \pm \frac{T_0^2}{\tau \mp T_0} \quad (4)$$

符号は $T < T_0$ のときは下を、 $T > T_0$ のときは上をとる。

周期 T の不確かさを ΔT とすると、 ΔT は次式で計算できる。

$$\Delta T = \frac{T_0^2}{(\tau \pm T_0)^2} \Delta \tau \cong \frac{4}{\tau^2} \Delta \tau \quad (5)$$

この方法で周期がどのくらいの精度で測定できるかを考える。 $\tau = 200 \text{ s}$ としその不確かさ $\Delta\tau = 1 \text{ s}$ とする。このとき振り子の周期の不確かさ $\Delta T \cong (T_0/\tau)^2 \Delta\tau$ は $(2/200)^2 \times 1 \text{ s} = 10^{-4} \text{ s}$ である。

つまり周期の相対的な不確かさは $\Delta T/T \cong 5 \times 10^{-5}$ である。

2.3 精密測定に伴う問題

周期の式は次の仮定のもとに導かれたものである。

- おもりの大きさが無視できる。
- 振動の振幅が十分に小さい。

10^{-4} の精度が問題となると重りの大きさや振り子の振幅の影響も考慮しなければならなくなる。

おもりを半径 r の球とし振り子の最大振れ角を θ とすると周期は次式で表されることが知られている。

$$T = 2\pi(1 + \frac{\theta^2}{16})\sqrt{\frac{h}{g}(1 + \frac{2r^2}{5h^2})} \quad (6)$$

g についてとくと次式が得られる。

$$g = \frac{4\pi^2 h}{T^2} (1 + \frac{2r^2}{5h^2} + \frac{\theta^2}{8}) \quad (7)$$

振角 θ は、スケール上の振幅 a と支点からスケールまでの距離 l で $\theta \cong \tan \theta = a/l$ と計算される。

周期の測定を始めるときの振幅 a_i 、と終えたときの振幅 a_f を測定し、 $\theta^2 = a_i a_f / l^2$ として本実験では次式で重力加速度 g の値を計算する。

$$g = \frac{4\pi^2 h}{T^2} (1 + \frac{2r^2}{5h^2} + \frac{a_i a_f}{8l^2}) \quad (8)$$

以下のような配慮をすれば重力加速度を不確かさ $\pm 0.1 \text{ cm/s}^2$ で求めることができる。

ここで h は金属球の中心から吊り金具 A の支点の下端までの長さであり、金属球の下から吊り金具 A の支点の下端までの長さを h' としたとき $h = h' - d/2$ で計算される。

また h の不確かさを Δh とすると、 Δh は次式で計算される。

$$\Delta h = \sqrt{(\Delta h')^2 + (\frac{\Delta d}{2})^2} \quad (9)$$

重力加速度 g の不確かさ Δg は、 Δh 、 ΔT を用いて

$$\Delta g = g \sqrt{(\frac{\Delta h}{h})^2 + (\frac{2\Delta T}{T})^2} \quad (10)$$

と計算される。

3 実験方法

以下のような手順で実験を行った。

- ノギスを用いて金属球の直径 d を測定した。

- 備え付きの三脚台 B を固定台 C の上において水準器を用いて三脚台の上面を水平にした。
- 針金を付ける前の吊り金具 A を三脚台の上に乗せて振動させた。この振動の周期がおよそ 2 秒になるように調整用ナット A_1 を回し調整した。
- 調整後吊り金具 A に吊り線をつけ、その吊り線他端に金属球をつけた。
- 金属球の下から吊り金具 A の支点の下端までの長さ h' を金尺で測定した。
- 針金と金属球を取り付けた吊り金具 A を三脚台 B にセットして振動させた。その周期がおよそ 2 秒であることを確認した。
- 望遠鏡を覗いて振動の振幅 a を測定した。
- 振動の中心近くに基準線を設定し光パルスを照射した。輝線がその基準線に一致してから、1 周期移動するまでの時間 τ を 1 回測定した。
- 測定を終えた後もう一度 h' を測定し、変化がないことを確認した。
- 針金の長さを少し短くした後、同様の測定をもう一度行った。

4 実験結果

- 1 回目の実験

金属球の直径 d は $d = 31.72 \text{ mm}$

金属球の直径の不確かさ $\Delta d = 0.05 \text{ mm}$

金属球の下から吊り金具 A の支点の下端までの長さ $h' = 1025.3 \text{ mm}$

金属球の中心から吊り金具 A の支点の下端までの長さ $h = h' - d/2 = 1009.4 \text{ mm}$

h' の不確かさ $\Delta h' = 0.1 \text{ mm}$

吊り金具 A の支点下端から基準線までの長さ $l = 886.3 \text{ mm}$

測定を開始するときの振動の振幅 $a_i = 57.5 \text{ mm}$

測定が終了したときの振動の振幅 $a_f = 25.5 \text{ mm}$

輝線の振動周期 $\tau = 236 \text{ s}$ 、振動周期の不確かさ $\Delta\tau = 2 \text{ s}$

周期 T は (4) 式から、

$$T = 2 + \frac{4}{236 - 2} = 2.01709 \text{ s}$$

と求められる。

重力加速度 g は (8) 式から、

$$g = \frac{4\pi^2 \times 1.0094}{2.01709^2} \left(1 + \frac{2 \times 15.86^2}{5 \times 1009.4^2} + \frac{57.5 \times 25.5 / 886.3^2}{8} \right) = 9.79753 \text{ m/s}^2$$

と求められる。

周期 T の不確かさ ΔT は (5) 式から

$$\Delta T = \frac{4}{236^2} \times 2 = 0.0001436368 \text{ s}$$

と求められる。

金属球の中心から吊り金具 A の支点の下端までの長さ h の不確かさ Δh は (9) 式から

$$\Delta h = \sqrt{0.1^2 + \left(\frac{0.05}{2}\right)^2} = 0.103 \text{ mm}$$

したがって重力加速度の不確かさは (10) 式より

$$\begin{aligned}\Delta g &= 9.79753 \times \sqrt{\left(\frac{0.103}{1009.4}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.0001436368}{2.01709}\right)^2} \\ &= 0.001716... \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

よって重力加速度 g は

$$g = (9.706 \pm 0.002) \text{ m/s}^2$$

と求められた。

- 2 回目の実験

金属球の直径 d 、金属球の直径の不確かさ Δd 、吊り金具 A の支点下端から基準線までの長さ l は 1 回目と共通であった。

金属球の下から吊り金具 A の支点の下端までの長さ $h' = 990.0 \text{ mm}$

金属球の中心から吊り金具 A の支点の下端までの長さ $h = h' - d/2 = 974.2 \text{ mm}$

h' の不確かさ $\Delta h' = 0.1 \text{ mm}$

測定を開始するときの振動の振幅 $a_i = 58.5 \text{ mm}$

測定が終了したときの振動の振幅 $a_f = 38.0 \text{ mm}$

輝線の振動周期 $\tau = 160 \text{ s}$ 、振動周期の不確かさ $\Delta \tau = 2 \text{ s}$

であった。

1 回目と同様に計算すると

周期 T は $T = 2.02532 \text{ s}$ 、周期 T の不確かさ ΔT は $\Delta T = 0.0003125 \text{ s}$

重力加速度 g は $g = 9.38037464 \text{ m/s}$

金属球の中心から吊り金具 A の支点の下端までの長さ h の不確かさ Δh は $\Delta h = 0.103 \text{ mm}$

重力加速度の不確かさ Δg は $\Delta g = 0.003060$

よって重力加速度 g は

$$g = (9.380 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$$

と求められた。

結果をまとめると以下の表に示すとおりである。

表 1 重力加速度の値

1 回目 /(m/s)	2 回目 /(m/s)
(9.706 ± 0.002)	(9.380 ± 0.003)

5 考察

5.1 実験結果について

1 回目の実験で得られた重力加速度の値は $(9.706 \pm 0.002) \text{ m/s}^2$ 、2 回目の実験で得られた重力加速度の値は $(9.380 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$ であった。

両者の値は不確かさの範囲が互いに重なっていない。その理由を考察する。考えられる理由は金属球の下から吊り金具 A の支点の下端までの長さを金尺で測った際に不確かさを最小目盛りの十分の一である 0.1 mm としたが、実際にはより大きな値となっていた可能性である。また、周期の精密測定の際に、端に到達したことが分かりづらく、実際と大きく離れている値を取ってしまったことなどが考えられる。

6 参考文献

- 基礎科学実験 A(物理学実験) 平成 29 年度版