

1 目的

電気回路の中で起こる減衰振動や共振といった力学的な現象を実際に観測し、振動の周波数やピーク電圧と時間の関係を求めることでその現象を理解する。

2 原理

電流が一方方向に向かって流れるものを直流といい、直流電源で構成される回路を直流回路と呼ぶ。抵抗値が R の抵抗器の両端電圧を $V_R(t)$ 、流れる電流を $I(t)$ とすれば、次式のオームの法則が成り立つ。

$$V_R(t) = RI(t) \quad (1)$$

抵抗値の単位は Ω で表す。

コンデンサの静電容量を C 、ある時間に蓄えられている電荷を $q(t)$ 、コンデンサの両端の電圧 $V_c(t)$ とすれば次のような関係が成り立つ。

$$q(t) = CV_c(t) \quad (2)$$

電化の単位は C を用い、静電容量の単位には F を用いる。電流とは、単位時間にある面を通過する電荷量であるから、

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (3)$$

となる。コイルは時間変化する電流に対して誘導起電力を生じる。コイルの自己インダクタンスを L 、ある時間にコイルに流れる電流を $I(t)$ とすると、誘導起電力 $V_L(t)$ は次式で表される。

$$V_L(t) = -L \frac{dI(t)}{dt} \quad (4)$$

インダクタンスの単位には H を用いてる。

抵抗、コイル、コンデンサの直列回路 (RLC 直列回路) を考える。

電池の起電力を V とし、ある時刻に蓄えられている電荷を $q(t)$ 、抵抗の抵抗値、コイルのインダクタンス、コンデンサの静電容量をそれぞれ、 R, L, C とすると、回路を流れる電流 $I(t)$ は次式で表される。

$$V - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t) + \frac{q(t)}{C} \quad (5)$$

両辺を微分し (3) 式を用い、 $2\gamma = R/L, \omega_0^2 = 1/(LC)$ とおけば、

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0 \quad (6)$$

(6) 式は $I(t)$ を $x(t)$ とおけば速度に比例する抵抗力が働く単振動の運動方程式と同形であり、解は γ と ω_0 の大小関係によって 3 つに分かれることが知られている。

- $\gamma < \omega_0$ のとき (減衰振動)

$$I(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \quad (7)$$

- $\gamma > \omega_0$ のとき (過減衰)

$$I(t) = e^{-\gamma t} (ae^{\omega_1 t} + be^{-\omega_1 t}) \quad (8)$$

- $\gamma = \omega_0$ のとき (臨界減衰)

$$I(t) = e^{-\gamma t} (at + b) \quad (9)$$

ここで a, b は初期条件によって決まる定数で角周波数 ω_1 は、過減衰の場合 $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, 減衰振動の場合 $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ となる。

すなわち、角周波数 ω_1 は過減衰のとき、

$$\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{LC}} \quad (10)$$

減衰振動のとき、

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \gamma^2} \quad (11)$$

で求めることができる。したがって、時間と電流の関係を観測すれば、角周波数 ω_1 , 抵抗係数 γ を求めることができる。

R, L がわかっているとき RLC 直列回路が臨界減衰となるような C の値は、
 $\gamma = \omega_0, \gamma = R/2L, \omega_0 = \sqrt{1/LC}$ より、

$$C = \frac{4L^2}{R^2} \quad (12)$$

となる。

γ は回路定数から、次式で求められる。なお、抵抗値 R にはコイルの抵抗値と発振器の出力インピーダンス 50Ω も加える必要がある。

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (13)$$

3 実験方法

直流回路では臨界減衰を観測することは難しいため減衰振動と過減衰について行った。

まず LCR メータでコイルのインダクタンス L を、テストでコイルの直流抵抗値 R_L を測定した、回路は $5\text{ k}\Omega$ の抵抗を用いた際に臨界減衰が起こるようなインダクタンス L と静電容量 C を用い、抵抗値を変えること減衰振動あるいは過減衰が起こるように作るため、 $R = 5\text{ k}\Omega$ および測定した L の値を (12) 式に代入し C の値を導きその値に最も近いコンデンサを選びその静電容量 C をテストで測定し測定値を記録した。

以上のコイルとコンデンサを用いて以下の 2 つの抵抗についてブレッドボード上に回路を作り測定を行った。

3.1 減衰振動

$100\sim 200\ \Omega$ 程度の抵抗を選びテストで抵抗値を測定し測定値を記録した。

次に以下のような手順で発振器とオシロスコープを設定し波形を観測した。

- 発振波形を矩形波に、発振周波数を 100 Hz にした。
- 発振器の AMPL (振幅調整) ボリュームを $1/2$ 程度回した。
- オシロスコープの TRIGGER 部にある AUTO ボタンを押した。
- 縦横軸の調整ボリュームを操作し波形が適当な大きさとなるよう調整した。
- 適切な波形が表示されたら TRIGGER 部の STOP ボタンを押し波形を停止させた。
- 波形を写真に収めて記録した。
- カーソル機能を使い、波形の山の時間と電圧の関係を記録した。
- ピーク時の電圧を V_0 とし V_0 と各時間における電圧との比の対数を求め、表にしてまとめた。また横軸に時間、縦軸に電圧比の対数をとったグラフを作成した。
- グラフの傾きから γ を求め、その値を (13) 式から求めた γ の値とあわせて表にまとめて比較した。

3.2 過減衰

$6\text{ k}\Omega$ から $8\text{ k}\Omega$ 程度の抵抗を選びテストで抵抗値を測定し測定値を記録した。

減衰振動のときと同様にオシロスコープに波形を表示させ次の測定を行った。

- 波形を写真に収めて記録した。
- カーソル機能を使い、波形の山の時間と電圧の関係を記録した。
- ピーク時の電圧を V_0 とし V_0 と各時間における電圧との比の対数を求め、表にしてまとめた。また横軸に時間、縦軸に電圧比の対数をとったグラフを作成した。

- グラフの傾きから γ を求め, その値を (13) 式から求めた γ の値とあわせて表にまとめて比較した.

4 実験結果

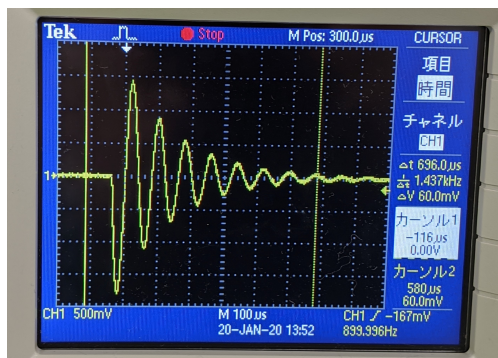
コイルのインダクタンス L は $L = 34.62 \text{ mH}$, コイルの直流抵抗値 R_L は $R_L = 186.90 \Omega$ であった.

また $R = 10 \text{ k}\Omega$ としたとき臨界減衰が起こるような C の値の計算値は $C = 5.53 \times 10^{-9} \text{ F}$, その値に最も近いコンデンサの静電容量 C の実測値は $C = 4.834 \times 10^{-9} \text{ F}$ であった.

4.1 減衰振動

抵抗値 R の実測値は $R = 131.03 \Omega$ であった.

波形の画像は次のとおりである.



減衰振動における時間と電圧の関係は以下の表のようになった.

表 1 減衰振動における時間と電圧の関係

時間 $t_i/\mu\text{s}$	電圧 V_i/mV	電圧比の絶対値の対数
60	1.42	0
140	0.90	-0.4560
220	0.58	-0.8953
300	0.36	-1.372
380	0.22	-1.865

グラフの傾きから抵抗係数 γ の値は $\gamma = 5828 \text{ s}^{-1}$ と求められた.

また、グラフの傾きの不確かさはグラフから決定される値 $\delta X = 4.580 \mu\text{s}$, $\delta Y = 0.02675$ を用いて、

$$\Delta\gamma = 5828 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{1.865}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{320}\right)^2} = 118... \text{s}^{-1}$$

一方, (13) 式により求めた抵抗係数 γ の値は $\gamma = 5313 \text{ s}^{-1}$ であった.

また測定した角周波数 ω は $f = 2\pi/T = 2\pi/80 \times 10^{-6} = 78539.82 \text{ s}^{-1}$

計算により求めた角周波数 ω は $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2} = 77277.48 \text{ s}^{-1}$

以上の結果を表にまとめると次のようになる.

表 2 減衰振動における回路定数

抵抗値 R/Ω	コイルのインダクタンス L/mH	コンデンサの静電容量 C/nF
367.93	34.62	4.834

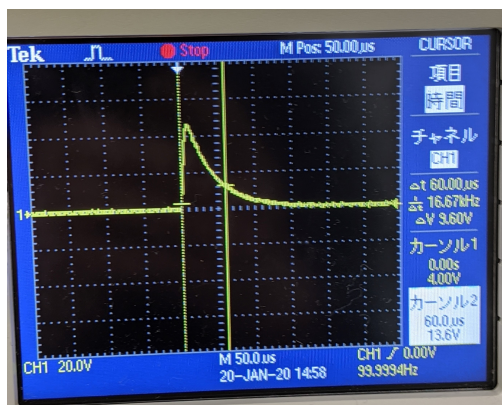
表 3 減衰振動における周波数および抵抗係数

	理論値	実測値
抵抗係数 γ/s^{-1}	5313	5828 ± 118
周波数 f/s^{-1}	77277	78539

4.2 過減衰 (1 回目)

抵抗値 R の実測値は $R = 6.778 \text{ k}\Omega$ であった.

波形の画像は次のとおりである.



過減衰における時間と電圧の関係は以下の表のようになった。

表 4 過減衰における時間と電圧の関係 (1)

時間 $t_i/\mu\text{s}$	電圧 V_i/V	電圧比の対数
10	43.2	0
15	40.0	-0.077
20	33.6	-0.251
25	29.6	-0.378
50	13.6	-1.156
75	5.60	-2.043
100	1.60	-3.296

グラフの傾きから抵抗係数 γ の値は $\gamma = 27240 \text{ s}^{-1}$ と求られた。

また、グラフの傾きの不確かさはグラフから決定される値 $\delta X = 10.36 \mu\text{s}$ 、 $\delta Y = 0.2824$ を用いて、

$$\Delta\gamma = 27240 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{2.043}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{65}\right)^2} = 5747 \dots \text{s}^{-1}$$

回路定数から求めた角周波数 ω_1 (10) および (13) 式から $\omega_1 = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = 65469 \text{ rad/s}$ 一方、(13) 式により求めた抵抗係数 γ の値は $\gamma = 101300 \text{ s}^{-1}$ であった。

よって回路定数によって求められる $\gamma - \omega_1$ の値は $\gamma - \omega_1 = 35831 \text{ s}^{-1}$ である。

以上の結果を表にまとめると次のようになる。

表 5 過減衰における回路定数

抵抗値 $R/\text{k}\Omega$	コイルのインダクタンス L/mH	コンデンサの静電容量 C/nF
7.014	34.62	4.834

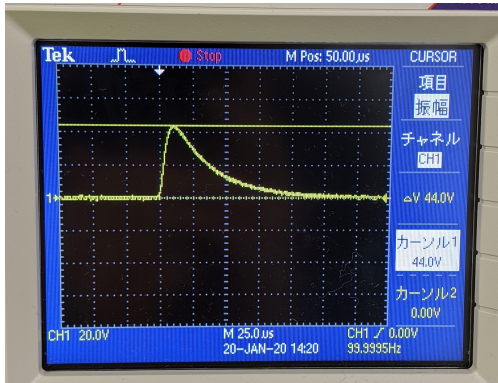
表 6 過減衰における角周波数および抵抗係数 (2)

	理論値	実測値
抵抗係数 γ/s^{-1}	101300	
角周波数 $\omega_1/\text{rad/s}^{-1}$	65469	
抵抗係数 - 角周波数 $\gamma - \omega_1/\text{s}^{-1}$	35831	27240 ± 5747

4.3 過減衰 (2 回目)

抵抗値 R の実測値は $R = 8.137 \text{ k}\Omega$ であった.

波形の画像は次のとおりである.



過減衰における時間と電圧の関係は以下の表のようになった。

表 7 過減衰における時間と電圧の関係 (2)

時間 $t_i/\mu\text{s}$	電圧 V_i/V	電圧比の対数
10	45.6	0
20	36.8	-0.214
30	26.0	-0.562
40	20.8	-0.785
50	16.0	-1.047
60	13.6	-1.210
70	9.60	-1.558
80	7.20	-1.846
100	4.80	-2.251

グラフの傾きから抵抗係数 γ の値は $\gamma = 25011 \text{ s}^{-1}$ と求められた。

また、グラフの傾きの不確かさはグラフから決定される値 $\delta X = 2.470 \mu\text{s}$ 、 $\delta Y = 0.06178$ を用いて、

$$\Delta\gamma = 25011 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{2.251}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{90}\right)^2} = 971 \dots \text{s}^{-1}$$

と求められた。

回路定数から求めた角周波数 ω_1 (10) および (13) 式から $\omega_1 = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = 91109 \text{ rad/s}$ 一方、(13) 式により求めた抵抗係数 γ の値は $\gamma = 119483 \text{ s}^{-1}$ であった。

よって回路定数によって求められる $\omega_1 - \gamma$ の値は $\omega_1 - \gamma = 28374 \text{ s}^{-1}$ である。

以上の結果を表にまとめると次のようになる。

表 8 過減衰における回路定数

抵抗値 $R/\text{k}\Omega$	コイルのインダクタンス L/mH	コンデンサの静電容量 C/nF
8.273	34.62	4.834

表 9 過減衰における角周波数および抵抗係数 (2)

	理論値	実測値
抵抗係数 γ/s^{-1}	119483	
角周波数 $\omega_1/\text{rad/s}^{-1}$	91109	
抵抗係数 - 角周波数 $\gamma - \omega_1/\text{s}^{-1}$	28374	25011 ± 971

5 考察

減衰振動について、グラフの傾きから求めた抵抗係数は $5828 \pm 118\text{s}^{-1}$ 、一方、 R 、 L 、 C の値から求めた理論値は 5313s^{-1} であった。

過減衰 (1 回目) について、グラフの傾きから求めた抵抗係数と角周波数の差は $27240 \pm 5747\text{s}^{-1}$ 、一方、 R 、 L 、 C の値から求めた理論値は 35831s^{-1} であった。

過減衰 (2 回目) について、グラフの傾きから求めた抵抗係数と角周波数の差は $25011 \pm 971\text{s}^{-1}$ 、一方、 R 、 L 、 C の値から求めた理論値は 28374s^{-1} であった。

全体的に誤差の範囲は小さかったが、理論値は誤差の範囲外であった。その理由は グラフの傾きを求めたときに生じた不確かさや、回路を組む際にワニ口クリップが接触不良を起こしていた可能性や、データの個数が不足していて誤差が実際よりも小さかった可能性などが、ずれの原因であると考えられる。また (13) 式から R を大きくすれば抵抗係数の値も大きくなることが分かる。(11) 式から抵抗係数が大きくなれば角周波数の値は小さくなることも確認できる。

過減衰において抵抗値を大きくしたとき、(13) 式から抵抗係数の値は大きくなることがわかる。また、(10) 式から角周波数の値も大きくなることが分かる。

参考文献

- [1] 基礎科学実験 A(物理学実験) 2019 年版