

1 目的

すべての物体は力を受けると変形する。力の大きさがある範囲内にあるとき、力を取り去ると物体は元の形に戻る。このような変形を弾性変形といい、この実験では引っ張り応力に対する弾性変形 (ひずみ) の係数であるヤング率を 3 種類の材料について測定する。

2 原理

2.1 ヤング率

棒に力をかけて引っ張ると棒は伸びる。断面積 S の棒に力 F をかけて引っ張ったとき、棒の長さ l から Δl だけ伸びたとする。伸びの割合 $\epsilon = \Delta l/l$ をひずみという。

ひずみの大きさを決めるのは単位断面積あたりに働く力の大きさ $\sigma = F/S$ であり $\sigma = E\epsilon$ と表すとき、比例定数 E をヤング率という。ヤング率の大きな材料ほど伸ばすのに大きな力を要することになる。

2.2 実験の原理

金属棒の中心に鉛直方向に力を加えると棒は湾曲する。このような変形を "たわみ" という。

縦 a 、横 b の長方形を断面として有する棒を間隔 l の 2 つのナイフエッジで支え、その中心に力 mg を加えたとき、たわみによる中心の降下量 h は次式で表される。

$$h = \frac{l^3}{4a^3bE}mg$$

ここで E が棒の材料のヤング率である。降下量の値は微小であるので光の梃子 (鏡 M、レーザー L、およびスケール S より構成される) を用いて拡大して観測する。

たわみによる鏡の傾き角を θ 、鏡台の脚間の有効距離を r とすると次式が成り立つ。

$$h = r \sin \theta \cong r\theta$$

鏡で反射したレーザー光線は入射光線と角度 2θ 傾く。微小角の近似を使うと荷重をかける前後のスケールの読み S_0 、 S の差は

$$S - S_0 = d \tan(2\theta) \cong 2d\theta$$

d は鏡とスケール間の距離である。したがって

$$h = r\theta = r \frac{S - S_0}{2d}$$

の関係が成り立ち。ヤング率 E は次式で計算できる。

$$E = \frac{g}{2} \frac{l^3 d}{a^3 b r} \frac{m}{S - S_0} \quad (1)$$

3 実験方法

以下のような手順で実験を行った。

- ナイフエッジの上に支持棒を奥に測定棒を手前にして間隔 2cm 程度で並べて載せた。
- 鏡の前脚に荷重を載せるハンガーをつけ、これを測定棒の上、ナイフエッジの midpoint にセットした。
- レーザーを鏡と同じ高さにして、レーザー光線が鏡の中央に当たるようにレーザーの傾きを調整した。
- 荷重をかけない状態で鏡で反射したレーザー光線がレーザーとほぼ同じ高さでスケールに当たるように鏡の向きと傾きを調整した。
- おもりの質量を天秤で 1 個ずつ測定した。
- おもりを載せていないときのスケールの目盛りを読み実験ノートに記録した。おもりを 1 個ずつ載せるたびにスケールの目盛りを読み取り、6 個載せ終わったらおもりを 1 個ずつ外していきその都度スケールの目盛りを読み取った。
- アルミ・ジュラルミン・炭素繊維強化プラスチックの 3 種類の試料に対してこの操作を 2 往復ずつ行った。
- 測定棒の厚さ a 、幅 b をマイクロメータを使って、ナイフエッジの間隔 l 、鏡とスケールの間の距離 d 、鏡の前後の脚の間隔 r 、を金尺を用いてそれぞれ測った。

4 結果

おもりの質量の測定値は次のようになった。

表 1 おもりの質量

おもり番号	質量 m/g
1	200.8
2	201.4
3	201.0
4	201.8
5	201.8
6	201.2

また鏡台の脚間の有効距離の測定値 r は $r = 34.5 \text{ mm}$ となった。この値は全ての試料について共通である。

4.1 アルミの測定

アルミのたわみの測定値は次の表に示す通りとなった。

また重りの質量 m を縦軸にスケールの目盛りの読み S を横軸にとりプロットしたグラフをレポート末尾に添付した。

グラフの勾配より $\Delta m/\Delta S = \frac{1006.0}{3.15} = 319.37 \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1}$ と求められた。

また、グラフの勾配の不確かさを $\Delta(\Delta m/\Delta S)$ とするとその値はグラフから決定される値 $\delta X = 0.3 \text{ mm}$ 、 $\delta Y = 95.811 \text{ g}$ を用いて、

$$\Delta(\Delta m/\Delta S) = 319.37 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{1207.2}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{3.85}\right)^2} = 35.522 \dots \text{g} \cdot \text{mm}^{-1}$$

と求められた。

表 2 アルミのたわみ

質量 m/g	スケール (1 往復) S/mm	スケール (2 往復) S/mm
0	163.6	163.6
200.8	164.2	164.4
402.2	164.5	164.5
603.2	165.4	165.4
805.5	166.0	165.4
1006.0	166.6	165.7
1201.2	167.4	166.5
1006.2	167.0	167.3
855.5	166.0	166.2
603.2	165.6	165.5
402.2	165.1	164.5
200.8	164.4	164.4
0	163.5	163.5

アルミの長方形断面の縦の長さ a 、横の長さ b 、棒の間隔 l 、鏡とスケール間の距離 d の測定値は次の表に示す通りとなった。

表 3 アルミのヤング率の計算に用いる長さの測定値

a/mm	b/mm	l/mm	d/mm
12.021	20.380	401.0	876.3

またそれぞれの値の不確かさは次の表に示す通りとなった。

表 4 アルミのヤング率の計算に用いる長さの不確かさ

$\Delta a/\text{mm}$	$\Delta b/\text{mm}$	$\Delta l/\text{mm}$	d/mm
0.002	0.002	0.5	0.5

● アルミのヤング率の計算値

アルミのヤング率を E_a とすると (1) 式の $m/(S - S_0)$ にグラフの勾配より求めた値 $\Delta m/\Delta S$ を使用することで次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 E_a &= \frac{9.7978}{2} \times \frac{(401.0)^3 \times 876.3}{(12.021)^3 \times 20.380 \times 34.5} \times \frac{1006.0}{3.15} \\
 &= 709.65181 \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \\
 &= 709.65181 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}
 \end{aligned}$$

アルミのヤング率の不確かさを ΔE_a とすると

$$\begin{aligned}
 \Delta E_a &= E_a \times \sqrt{\left(\frac{3 \times 0.002}{12.021}\right)^2 + \left(\frac{0.002}{20.380}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{876.3}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 0.5}{401.0}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{34.5}\right)^2 + \left(\frac{35.52}{319.37}\right)^2} \\
 &= 79.640117 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}
 \end{aligned}$$

よって、アルミのヤング率 E_a は

$$E_a = (71 \pm 8) \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

と求められた。

4.2 ジュラルミンの測定

ジュラルミンのたわみの測定値は次の表に示す通りとなった。

また重りの質量 m を縦軸にスケールの目盛りの読み S を横軸にとりプロットしたグラフをレポート末尾に添付した。

グラフの勾配より $\Delta m/\Delta S = \frac{1107.2}{13.15} = 91.802 \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1}$ と求められた。

また、グラフの勾配の不確かさを $\Delta(\Delta m/\Delta S)$ とするとその値はグラフから決定される値 $\delta X = 0.15 \text{ mm}$ 、 $\delta Y = 13.77 \text{ g}$ を用いて、

$$\Delta(\Delta m/\Delta S) = 91.802 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{1207.2}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{13.15}\right)^2} = 13.866... \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1}$$

と求められた。

表5 ジュラルミンのたわみ

質量 m/g	スケール (1 往復) S/mm	スケール (2 往復) S/mm
0	179.5	179.5
200.8	181.5	181.5
402.2	183.6	183.7
603.2	186.0	186.0
805.5	188.2	188.2
1006.0	190.5	190.3
1201.2	192.5	192.8
1006.2	190.7	191.0
855.5	188.7	188.8
603.2	186.5	186.5
402.2	184.4	184.0
200.8	182.0	181.6
0	179.5	179.5

ジュラルミンの長方形断面の縦の長さ a 、横の長さ b 、棒の間隔 l 、鏡とスケール間の距離 d の測定値は次の表に示す通りとなった。

表6 ジュラルミンのヤング率の計算に用いる長さの測定値

a/mm	b/mm	l/mm	d/mm
8.073	19.495	401.0	876.3

またそれぞれの値の不確かさは次の表に示す通りとなった。

- ジュラルミンのヤング率の計算値

表 7 ジュラルミンのヤング率の計算に用いる長さの不確かさ

$\Delta a/\text{mm}$	$\Delta b/\text{mm}$	$\Delta l/\text{mm}$	d/mm
0.01	0.01	0.5	0.5

ジュラルミンのヤング率を E_{cu} とすると (1) 式の $m/(S - S_0)$ にグラフの勾配より求めた値 $\Delta m/\Delta S$ を使用することで次のように求められる。

$$E_{cu} = \frac{9.7978}{2} \times \frac{(401.0)^3 \times 876.3}{(8.703)^3 \times 19.495 \times 34.5} \times \frac{1107.2}{13.15}$$

$$= 71.80918424 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

ジュラルミンのヤング率の不確かさを ΔE_{cu} とすると

$$\Delta E_{cu} = E_{cu} \times \sqrt{\left(\frac{3 \times 0.01}{8.073}\right)^2 + \left(\frac{0.010}{19.495}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{876.3}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 0.5}{401.0}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{34.5}\right)^2 + \left(\frac{13.86}{91.802}\right)^2}$$

$$= 10.89809736 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

よって、ジュラルミンのヤング率 E_{cu} は

$$E_{cu} = (71 \pm 10) \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

と求められた。

4.3 炭素繊維強化プラスチックの測定

炭素繊維強化プラスチックのたわみの測定値は次の表に示す通りとなった。

また重りの質量 m を縦軸にスケールの目盛りの読み S を横軸にとりプロットしたグラフをレポート末尾に添付した。

グラフの勾配より $\Delta m/\Delta S = \frac{805.0}{42.45} = 18.963 \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1}$ と求められた。

また、グラフの勾配の不確かさを $\Delta(\Delta m/\Delta S)$ とするとその値はグラフから決定される値 $\delta X = 0.8 \text{ mm}$ 、 $\delta Y = 15.17 \text{ g}$ を用いて、

$$\Delta(\Delta m/\Delta S) = 18.963 \times \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{1207.2}\right)^2 + \left(\frac{\delta X}{63.2}\right)^2} = 9.816... \text{ g} \cdot \text{mm}^{-1}$$

と求められた。

表 8 炭素繊維強化プラスチックのたわみ

質量 m/g	スケール (1 往復) S/mm	スケール (2 往復) S/mm
0	173.5	173.5
200.8	184.3	184.3
402.2	194.4	194.5
603.2	204.6	204.7
805.5	215.5	215.5
1006.0	226.4	226.1
1201.2	236.5	236.9
1006.2	226.6	227.0
855.5	216.4	216.4
603.2	205.5	205.5
402.2	194.5	194.6
200.8	184.4	184.3
0	173.5	173.5

炭素繊維強化プラスチックの長方形断面の縦の長さ a 、横の長さ b 、棒の間隔 l 、鏡とスケール間の距離 d の測定値は次の表に示す通りとなった。

表 9 炭素繊維強化プラスチックのヤング率の計算に用いる長さの測定値

a/mm	b/mm	l/mm	d/mm
4.830	20.100	401.0	876.3

またそれぞれの値の不確かさは次の表に示す通りとなった。

- 炭素繊維強化プラスチックのヤング率の計算値

表 10 炭素繊維強化プラスチックのヤング率の計算に用いる長さの不確かさ

$\Delta a/\text{mm}$	$\Delta b/\text{mm}$	$\Delta l/\text{mm}$	d/mm
0.01	0.01	0.5	0.5

炭素繊維強化プラスチックのヤング率を E_c とすると (1) 式の $m/(S - S_0)$ にグラフの勾配より求めた値 $\Delta m/\Delta S$ を使用することで次のように求められる。

$$E_c = \frac{9.7978}{2} \times \frac{(401.0)^3 \times 876.3}{(4.830)^3 \times 20.100 \times 34.5} \times \frac{805.0}{42.45}$$

$$= 67179227.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

炭素繊維強化プラスチックのヤング率の不確かさを ΔE_c とすると

$$\Delta E_c = E_c \times \sqrt{\left(\frac{3 \times 0.01}{4.830}\right)^2 + \left(\frac{0.05}{20.100}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{876.3}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 0.5}{401.0}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{34.5}\right)^2 + \left(\frac{9.816}{18.963}\right)^2}$$

$$= 34792088.391 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

よって、炭素繊維強化プラスチックのヤング率 E_a は

$$E_c = (67 \pm 3) \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

と求められた。

5 考察

5.1 文献値との比較

アルミのヤング率の文献値は $70.3 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ であった。計算値として得られた値は $(71 \pm 8) \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ でありこれは文献値より大きい値であった。数値自体はかなり近い値だったが、かなり誤差が大きかった。これは、 $\Delta(\Delta m / \Delta S)$ の誤差が大きかったこと、ナイフエッジ間や鏡台の足の長さの誤差を大きく見積もってしまった事などが考えられる。

ジュラルミンのヤング率の文献値は $74 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ であった。計算値として得られた値は $(71 \pm 10) \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ であり文献値より小さい値であった。また、誤差もかなり大きかった。両者が一致しなかった原因として、鏡とスケールの距離 d の値の測定の失敗により実際よりも小さな値を測定値としてしまった可能性があげられる。また、かなり誤差が大きかった。これは、 $\Delta(\Delta m / \Delta S)$ の誤差が大きかったこと、ナイフエッジ間や鏡台の足の長さの誤差を大きく見積もってしまった事などが考えられる。

なお、今回の実験では、レーザーの装置から鏡までの距離は金尺で届かない長さであったため、複数回に分けて長さを測った。これが原因で、もしかしたら実際よりもひどい誤差が生じている可能性がある。

炭素繊維強化プラスチックのヤング率は材料の配合によって大きく異なるため、文献値との比較はしなかった。

5.2 物質の弾性的性質を表す弾性定数

物質の弾性的性質を表す弾性定数に弾性率というものがある。弾性率は変形のしにくさを表す物性値であり、弾性変形における応力とひずみの間の比例定数の総称である。

弾性率には縦弾性係数、横弾性係数、体積弾性率などがありヤング率は縦弾性係数の同義語である。

横弾性係数は剛性率ともよばれており通常 G で表される。ヤング率が容易に測定できるのに比べ、剛性率は測定するのが難しい値である。

6 参考文献

- 基礎科学実験 A(物理学実験) 平成 29 年度版
- 理科年表 (2019)



