

エアトラックによる力学実験

電気通信大学 I 類

2210632 宗村キヤ

2022 年 6 月 27 日作成

1 目的

エア・トラック（力学滑走台）は、内側から噴出する空気によって物体を少し浮かせることで、ほとんど摩擦なく物体を走らせる装置である。これの上における物体の直線運動を観測して、そのデータをグラフにプロットして、空気の粘性抵抗係数と慣性抵抗係数を求める。

2 原理

2.1 エアトラックの傾斜の測定

エア・トラック上を直線運動をする物体に掛かる力は主に次の 4 つである。なお、 m は物体の質量、 g は重力加速度、 θ は物体の運動する直線の水平からの傾き角である。ただし、図 2.1 のように運動方向の半直線が水平の下側に来るときは θ を負とし、上側に来るときは θ を正とする。

1. 重力（大きさ： mg ）
2. 摩擦（大きさ： $\mu mg \cos \theta$ ）
3. 空気の粘性抵抗（大きさ： λv ）
4. 空気の慣性抵抗（大きさ： κv^2 ）

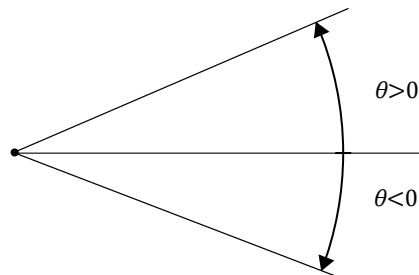


図 1: 角度 θ の正負の対応

これを用いて、物体の運動方向の運動方程式を立てると式 (1) のようになる。

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \cos \theta - \lambda v - \kappa v^2 + mg \sin \theta \quad (1)$$

エア・トラック上では $\mu \simeq 0$ と近似できるため、

$$m \frac{dv}{dt} = -\lambda v - \kappa v^2 + mg \sin \theta \quad (2)$$

である．ここで，等加速度運動の式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ から，互いに距離 s だけ離れた 2 地点それぞれを通過する速度 v_1, v_2 を用いて， \bar{v}, \bar{a} を定めることが出来る．

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (3)$$

$$\bar{a} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2s} \quad (4)$$

これを用いて先の式を書き換えることが出来る．両辺を mg で割り，滑走体のエアトラック上の運動方程式を減速の平均の加速度 \bar{a} と平均速度 \bar{v} で記述した次の式が導かれる．

$$\frac{\bar{a}}{g} = \left(\frac{\lambda}{mg} \right) \bar{v} + \left(\frac{\kappa}{mg} \right) \bar{v}^2 \mp \sin \theta \quad (5)$$

微小角 θ に対し， $\sin \theta \simeq \theta$ であるから，式 (5) により，横軸に \bar{v} ，縦軸に $\frac{\bar{a}}{g}$ を取ったときの， y 切片が θ に一致する．

2.2 κ, λ の決定

式 (2) に式 (3), (4) と $\sin \theta \simeq \theta$ を適用して，両辺を $m\bar{v}$ で割ると，

$$\bar{a} = \frac{\lambda}{m} + \frac{\kappa}{m} \bar{v} + g \frac{\theta}{\bar{v}} \quad (\theta \neq 0) \quad (6)$$

$$\bar{a} = \frac{\lambda}{m} + \frac{\kappa}{m} \bar{v} \quad (\theta = 0) \quad (7)$$

となる． $\theta = 0$ であれば， y 切片と直線の傾きから λ, κ を決定できる．

3 方法

3.1 実験器具

エアトラックの構造を図 3.1 に示す．これはトラック上にある小さな穴から空気を吹き出すことで，滑走体を浮かせて摩擦を最小限に抑える装置である．滑走体を図 3.1 に示す．これには黒い板が取り付けられており，エアトラックに間隔を開けて置いた 2 つのセンサーでこれの通過を検知する．そして，センサーを黒い板が通過しきるまでの時間を計測する．これによって，センサー通過時の速度が計測できる．

3.2 手順

1. リングを見て，エアトラックに歪みがないか確認した．
2. 滑走台と滑走体をエタノールの染み込んだティッシュで清掃した．
3. センサーの間隔 s と滑走台の全長 L ，滑走体の質量 m ，滑走体の開いた部分の面積 S ，そして黒い板の長辺の長さ Δs を直定規で測った．
4. 送風機と測定機器のスイッチを入れた．
5. 滑走体を滑走台上に乗せ，それが往復運動をするようになるまで，調節足のねじを用いておよその傾斜を調節した．
6. 滑走体を左右に何度か走らせて 1 往復したのちのセンサー 1, 2 における滑走体の通過にかかる時間 $\Delta t_1, \Delta t_2$ を測定した．

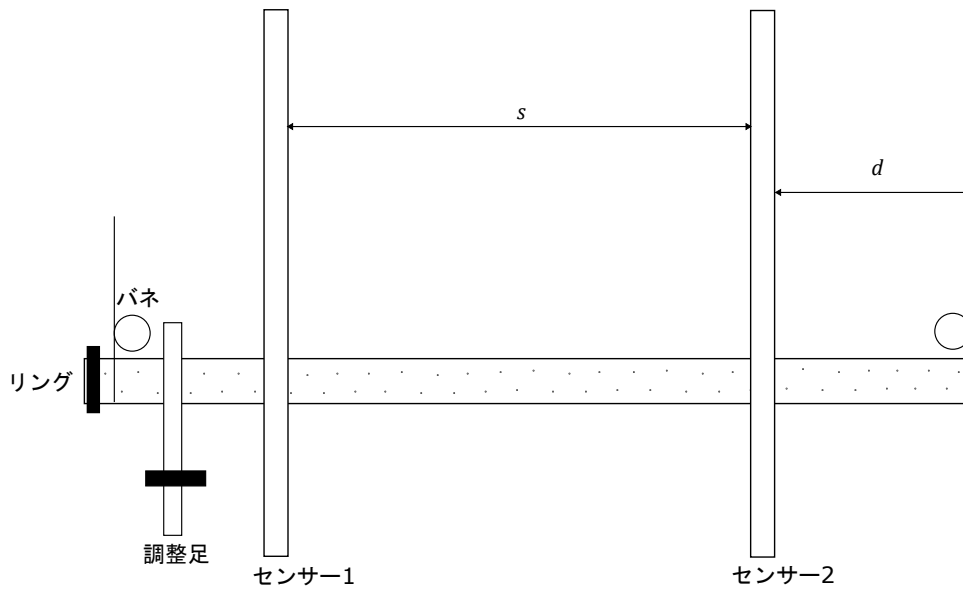


図 2: エアトラックの大まかな構造

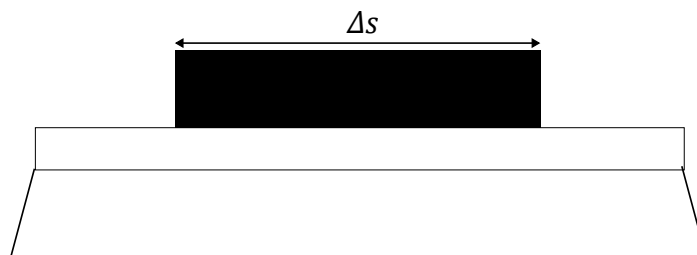


図 3: 滑走体の構造

7. 測定結果から \bar{a} , \bar{v} を何度か求め, グラフ用紙にプロットし滑走台の傾斜 θ を求めた.
8. 先の結果を用いて, 滑走台を水平に近づけた.
9. 滑走体を何度か走らせて計測を行った.

4 実験結果

4.1 $s, m, S, \Delta s, L$ の測定

使用した滑走体 (2A) の質量 m は,

$$m = 37.3 \text{ g} \quad (8)$$

であり, 黒い板の長辺の長さ Δs は,

$$\Delta s = 6.0 \text{ cm} \quad (9)$$

そして, センサー間隔 s は,

$$s = 91.2 \text{ cm} \quad (10)$$

一般に $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$ と測定された 2 つの量によって $z = xy$ と定まる量 z の不確かさ Δz は,

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 y^2 + x^2 (\Delta y)^2} \quad (11)$$

で表される. 滑走体の開いた部分の面積 S は不確かさを考慮して,

$$S = (9.20 \pm 0.01) \text{ cm} \times (3.51 \pm 0.01) \text{ cm} = (32.3 \pm 0.1) \text{ cm}^2 \quad (12)$$

滑走台の全長 L は,

$$L = 1196 \text{ mm} \quad (13)$$

4.2 滑走台の傾斜の調整

センサーを通過するのに要した時間 Δt を用いて, センサーを通過する時の滑走体の速さ v を次の式で求められる.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (14)$$

右向きに走らせた時の測定結果を表 4.2 に, 左向きに走らせた時の測定結果を表 4.2 に示した.

表 1: 右向きに走らせた時のセンサーを通過するのに要した時間

$\frac{\Delta t_1}{\text{s}}$	$\frac{\Delta t_2}{\text{s}}$	$\frac{v_1}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{v_2}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{\bar{v}}{\text{cm s}^{-1}}$	$\bar{a}/g \times 10^{-3}$
122.7871	132.2218	49	45	47	1.8
215.1325	254.1278	28	24	26	1.2
82.6370	86.5264	73	69	71	2.6
73.0773	75.8084	82	79	81	2.7
65.5225	67.7623	92	89	90	3.0
266.6214	322.5477	23	19	21	0.90
121.9627	131.2098	49	46	47	1.8

表 2: 左向きに走らせた時のセンサーを通過するのに要した時間

$\frac{\Delta t_1}{\text{s}}$	$\frac{\Delta t_2}{\text{s}}$	$\frac{v_1}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{v_2}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{\bar{v}}{\text{cm s}^{-1}}$	$\bar{a}/g \times 10^{-3}$
186.9295	202.3291	32	30	31	0.84
259.8573	291.5961	23	21	22	0.61
131.3685	139.4264	46	43	44	1.3
82.2114	86.5511	73	69	71	2.9
61.1129	63.8973	98	94	96	4.6

図 4.2 に左向きと右向きそれぞれの $\frac{\bar{a}}{g}$ と \bar{v} をプロットしたグラフを示す. グラフから滑走台の傾斜 θ は 0.16×10^{-3} と読み取った. 調節ねじのピッチは 1.25 mm であるから,

$$\frac{360}{1.25} L \theta = 55^\circ \quad (15)$$

よって, 調節ねじを 55° 時計回りに回転させればよい.

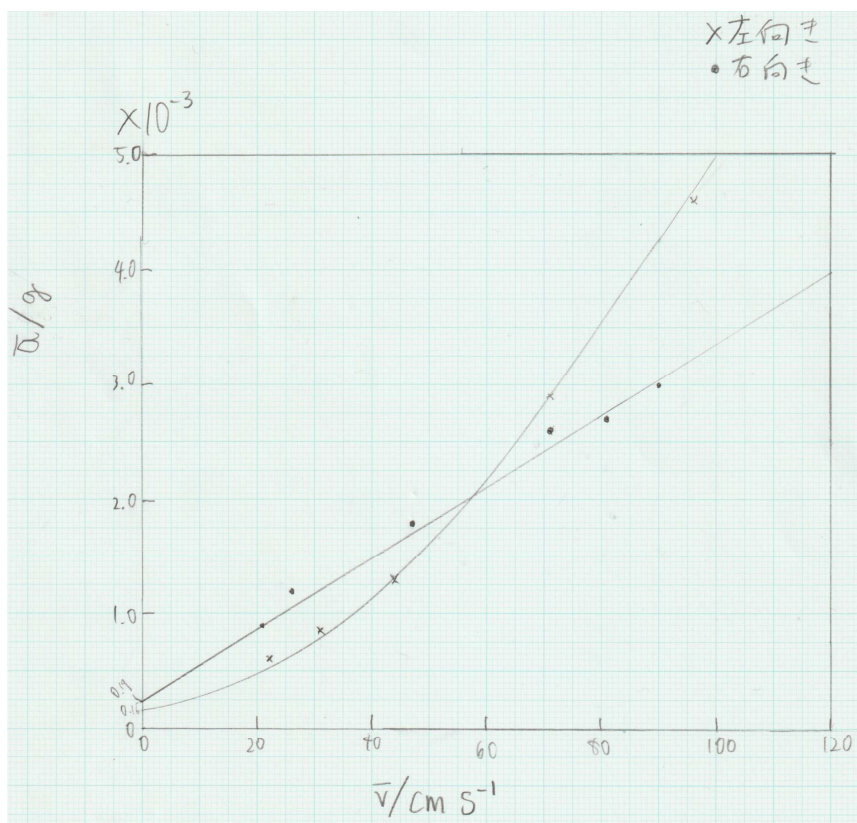


図 4: 滑走台の水平を確かめるグラフ

4.3 λ, κ の決定

表 4.3 に滑走体を走らせた時のセンサー 1, 2 それぞれを通過するのに要した時間を示す。

最小二乗法を用いた一次関数の近似は 2 つの量 x, y の関係として求める式を $y = ax + b$ としたとき, a, b は以下のようにして得られる。なお, x, y の n 個の測定値を整数 i を用いて x_i, y_i のように表す。また, $\sum_{i=1}^n$ を単に \sum と表す。

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (16)$$

$$a = \frac{\sum x_i (y_i - b)}{\sum x_i^2} \quad (17)$$

表 3: λ, κ の決定

$\frac{\Delta t_1}{s}$	$\frac{\Delta t_2}{s}$	$\frac{v_1}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{v_2}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{\bar{v}}{\text{cm s}^{-1}}$	$\frac{\bar{a} \cdot \bar{v}^{-1}}{\text{s}^{-1}} \times 10^{-2}$
111.1356	119.4240	54	50	52	4.1
55.4691	57.1106	108	105	107	3.4
181.9422	208.3570	33	29	31	4.6
273.6107	364.3309	22	16	19	6.0

式 (16), (17) を用いて 2 つの量 \bar{v} , $\overline{av^{-1}}$ の関係式を求めると,

$$a = -2.5 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad (18)$$

$$b = 5.8 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (19)$$

よって, 表 4.3 に示す \bar{v} , $\overline{av^{-1}} \times 10^2$ をプロットしたグラフとその近似直線を図 4.3 に示す. また, a , b の不

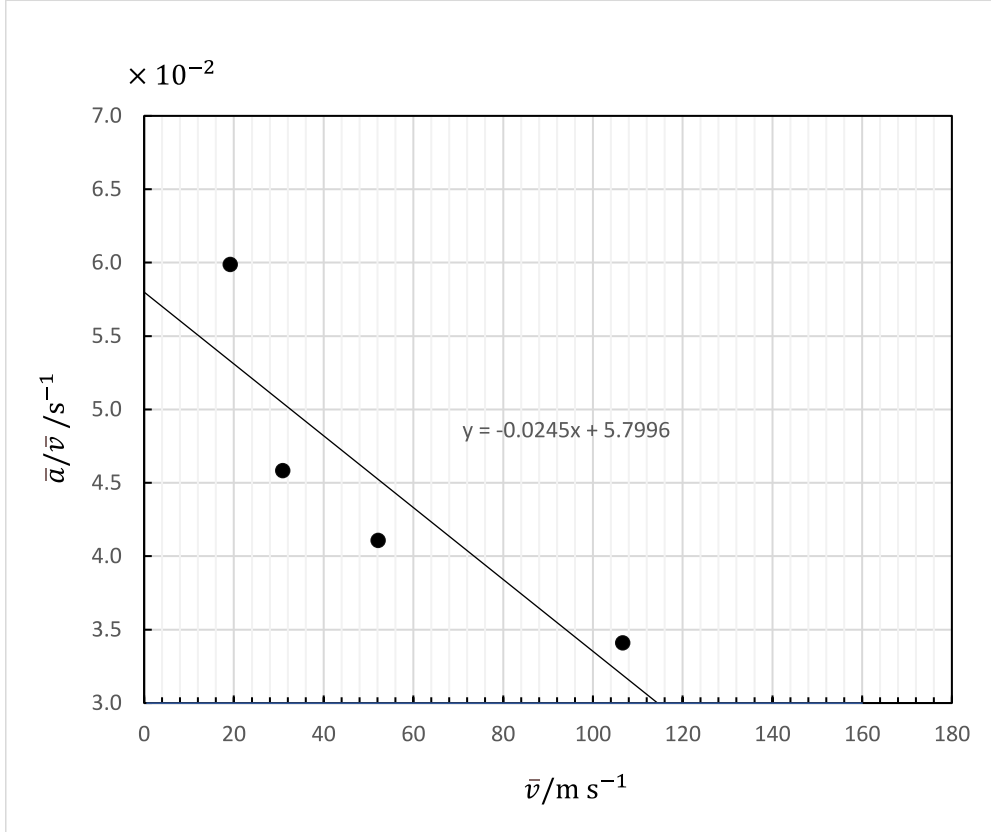


図 5: \bar{v} と $\overline{av^{-1}}$ の関係

確かさ Δa , Δb はそれぞれ

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum (a + bx_i - y_i)^2}{n - 2}} \quad (20)$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum (a + bx_i - y_i)^2}{n - 2}} \quad (21)$$

で求められる. 計算した結果は以下の通り.

$$\Delta a = 1 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad (22)$$

$$\Delta b = 6 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (23)$$

式 (7) から, λ , κ をそれぞれ求めた.

$$\lambda = bm = (5.8 \pm 0.6) \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot 37.3 \pm 0.1 \text{ g} = 2.2 \pm 0.2 \text{ g s}^{-1} \quad (24)$$

$$\kappa = am = (-3 \pm 1) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \cdot 37.3 \pm 0.1 \text{ g} = (-1 \pm 4) \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-1} \quad (25)$$

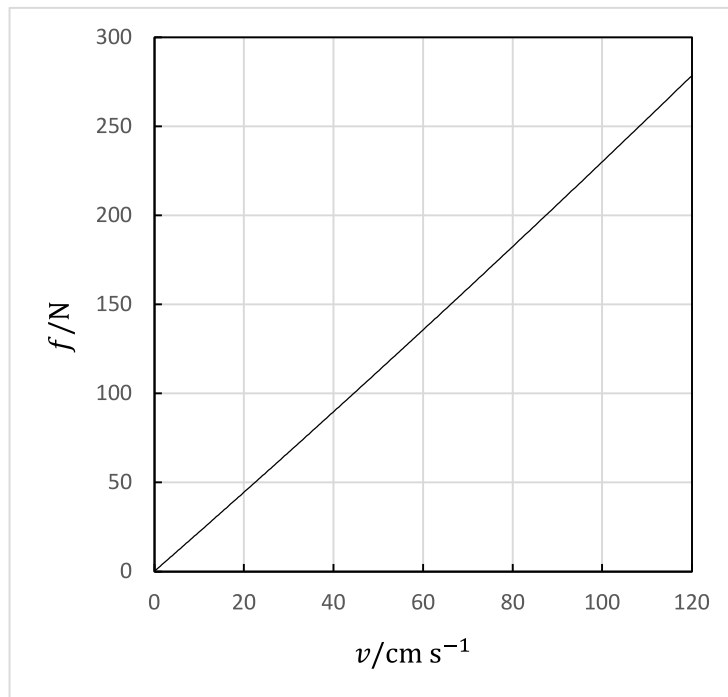


図 6: 滑走体に作用する抵抗力の大きさ f と滑走体の速さ v の関係

5 考察

5.1 滑走台の傾斜の調節

図 4.2 を見ると、右向きに走らせた時の結果のグラフが直線となっている。そのため、傾斜角 θ としては左向きに走らせた時の結果のグラフの切片を採用した。このようになる理由としては、周囲の空気の流れや、小さな穴の位置による運動への影響などの理由が挙げられるが、今回のデータの数ではこれらの検証をするのはとても難しいであろう。

5.2 滑走体に作用する抵抗力

式 (1) より、滑走体に作用する抵抗力の大きさ f は、 $\mu = 0$ 、 $\theta = 0$ であるから、

$$f = \lambda v + \kappa v^2 \quad (26)$$

$f - v$ グラフに式 (26) を書いたものを図 5.2 に示す。

5.3 初速 1 m/s の滑走体が制止するまでに動く距離

式 (1) より、

$$m \frac{dv}{dt} = -(\lambda v + \kappa v^2) \quad (27)$$

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = -\frac{mv}{\lambda v + \kappa v^2} = -\frac{m}{\lambda + \kappa v} \quad (28)$$

$x = 0$ の時, $v = v_0$, $x = x_\infty$ の時, $v = 0$ とすると, 式 (28) の両辺を v で v_0 から 0 まで積分して,

$$\begin{aligned} x_\infty - 0 &= \frac{m}{\kappa} \log \frac{\lambda + \kappa v_0}{\lambda + \kappa 0} \\ x_\infty &= \frac{m}{\kappa} \log \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda} v_0 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

このとき, x_∞ は初速 v_0 の滑走体が十分に長い滑走台の上を停止するまでに移動する距離と一致する. 式 (29) に $v_0 = 100 \text{ cm/s}$ と予め求めた λ と κ の値と m を代入すると,

$$x_\infty = 7 \pm 2 \text{ m} \quad (30)$$

となった. なお, x_∞ の不確かさ Δx_∞ は v_0 の不確かさを 0 として次の式で求めた.

$$\frac{\partial x_\infty}{\partial \kappa} = \frac{m v_0}{\kappa \lambda \left(\frac{\kappa}{\lambda} v_0 + 1 \right)} - \frac{m \log \left(\frac{\kappa}{\lambda} v_0 + 1 \right)}{\kappa^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial x_\infty}{\partial \lambda} = - \frac{m v_0}{\lambda (\kappa v_0 + \lambda)} \quad (32)$$

$$\frac{\partial x_\infty}{\partial m} = \frac{\log \left(\frac{\kappa}{\lambda} v_0 + 1 \right)}{\kappa} \quad (33)$$

$$\Delta x_\infty = \sqrt{\left(\frac{\partial x_\infty}{\partial \kappa} \right)^2 (\Delta \kappa)^2 + \left(\frac{\partial x_\infty}{\partial \lambda} \right)^2 (\Delta \lambda)^2 + \left(\frac{\partial x_\infty}{\partial m} \right)^2 (\Delta m)^2} \quad (34)$$

5.4 滑走体と滑走台の間の空気層の厚さ d_a

滑走体と滑走台の間の空気層の厚さ d_a は, 空気の粘性率 η , 滑走体の開いた部分の面積 S , 粘性抵抗係数 λ を用いて,

$$d_a = \frac{\eta S}{\lambda} \quad (35)$$

と表される. 20°C における空気の粘性率の文献値は $\eta = 18.2 \times 10^{-6} \text{ N s m}^{-2}$ であるから, 求めた λ と S の値を用いて,

$$d_a = (2.7 \pm 0.2) \times 10^{-4} \text{ cm} \quad (36)$$

参考文献

- [1] 国立天文台, 理科年表プレミアム, 物理/化学部, 表: 気体の粘度, <http://www.rikanenpyo.jp/member/> (参照 2022-07-02).