

百万石 2004年春号

MMA

目次

第 I 部 1FD を用いたノートのルータ化	3
1 求める機能	3
2 構成	3
3 内容物	4
4 クランチバイナリ	4
4.1 crunchgen	4
4.2 コマンドの選択	5
4.3 作成	5
5 カーネル	6
6 FD 起動後の root filesystem の作成	7
6.1 ディスクイメージの作成	8
6.2 ディレクトリ配置	8
6.3 デバイスファイルの作成	8
6.4 クランチバイナリの配置	9
6.5 /etc の設定ファイル	9
6.6 アンマウント	11
6.7 フロッピーディスクの作成	12
7 参考文献	12
第 II 部 C 科 3 年実験と tex とその他	13
8 3 年実験とは	13
9 実験が始まるまでにやる事	13
10 ルール	13
11 ワタシのハマった罫	14
11.1 回路シミュレーション	14
11.2 情報通信	14

12	tex を使う上での注意点	14
12.1	ied の tex 環境	14
12.2	音声・画像実験の画像処理の imgview3	14
12.3	手書き指定	14
13	諦めない	14
 第 III 部 実数の公理と、ε-δ 論法による極限の定義		15
14	有理数と無理数と実数と	15
14.1	有理数の稠密性	15
14.2	無理数を 10 進小数で表示する	16
14.3	有理数列の極限としての無理数	16
14.4	無理数についての素朴な疑問	17
14.5	10 進小数表示は実数か	17
14.6	実数の定義	17
15	極限と無限と ε-δ 論法と	17
15.1	円周率は有理数か	17
15.2	高校数学の言葉では	18
15.3	極限の定義	18
15.4	例題	18
15.5	おまけ	19
16	参考文献	19

第I部

1FDを用いたノートのルータ化

(著者) 青木 健太郎

<http://www.ff.ij4u.or.jp/~aoki-ke>

概要

ハードディスクの故障に依存せずにルータとして動くものが欲しかったので、余っている古いノートと1枚のフロッピーを使ってルータとして動作するものを作ってみた。

これらは、picoBSD プロジェクトで既に実現されているものであり目新しさはないが、誰かの参考になるかもしれないので書き記す事にする。

FreeBSD R4.9 を使用した。picoBSD は R3 系列で開発が止まっているようだ。

1 求める機能

ADSL 環境下でのトンネル接続を行なう。

以下の機能を満たして欲しい。

1. pppoe
2. パケットフィルタ
3. ログを他ホストに投げる

これらの要求を満たす為、以下のプログラムを使用する事にした。

1. ppp
2. ipfw
3. syslogd

2 構成

リスト 1: ==== 全体 ====

FD (ufs フォーマット)	
/	(ルートディレクトリ)
/kernel.gz	gzipped カーネル
/mfsroot.gz	gzipped MFS ルートディレクトリディスクイメージ
/boot	(起動関係)
/boot/loader	kgzipped カーネルローダ loader
/boot/loader.rc	loader 用設定ファイル

リスト 2: ==== /etc 以下 ====

```
/etc
defaults/
  pccard.conf
disktab
fstab
group
host.conf
ipfw.nat
login.conf
master.passwd
natd.conf
ppp/
  ppp.conf
  ppp.linkup
  ppp.linkdown
protocols
rc
resolv.conf
services
syslog.conf
```

3 内容物

以下のものを作成。

1. 機能限定 kernel
2. crunch された実行バイナリ
3. root filesystem のディスクイメージ
4. 起動ファイル rc

ソースが必要なので、`/usr/src` 以下にソースを展開しておく。

4 クランチバイナリ

フロッピーの容量は小さいので、使用するコマンド群をクランチバイナリと呼ばれる 1 つのバイナリとしてコンパイルする必要がある。

実行バイナリは dynamic link ではなく、static link にする必要がある。dynamic link されたプログラムは、対応する共有ライブラリが無いと動作しないが、共有ライブラリは 1 枚のフロッピーに収めるには大き過ぎるのである。必要なものだけを static link する必要がある。

static link して実行ファイルを生成する際に、複数のプログラムが同じものをリンクするという無駄を無くしたい。この要求を満たす為にあるのが、crunchgen である。

4.1 crunchgen

crunchgen は必要となるプログラムをまとめ、1 つの実行バイナリにして、静的にリンクするデータを一元化し無駄を省くプログラムである。

crunchgen は、各プログラムの内容を把握し、変数がかち合わないよう Makefile を作成する。あとは、make を実行するだけで、指定したプログラムを 1 つの実行ファイルにすることが出来る。プログラムは呼び出される名前により、動作を変化させる。

4.2 コマンドの選択

要求に基づき、使用するコマンドを選択する。

picoBSDに含まれている簡易コマンドを使用すると容量の節約が出来る。それらを含めて、最低限必要なもののみを選ぶ。

initの置き換え版であるoinitを使用する事も出来る。その場合、起動ファイルとしてrcの代わりにoinit.rcを使用する。oinitには簡易シェル機能が含まれている為、shの代わりに使用する事も出来る。だが、シェル変数の解釈をしないのでシェルスクリプト中で変数を使用出来ない。oinit使用の際は、あらかじめ変数を全て展開しておく必要がある。

4.3 作成

作業ディレクトリを作成し、移動する。

```
# mkdir ~/fdbsd; cd ~/fdbsd
```

クラッシュバイナリ作成用の作業ディレクトリを更に作る。

```
# mkdir build; cd build
```

crunchgenに与える設定ファイルを作成する。このファイルを仮にcrunch.confとする。

リスト 3: — crunch.conf —

```
# crunchgen configuration file for 1FD router using ppp
```

```
buildopts -DRELEASE_CRUNCH -DNOPAM -DNOIPSEC
```

```
srcdirs /usr/src/bin
```

```
srcdirs /usr/src/sbin
```

```
srcdirs /usr/src/usr.bin
```

```
srcdirs /usr/src/usr.sbin
```

```
srcdirs /usr/src/usr.sbin/pccard
```

```
srcdirs /usr/src/sbin/i386
```

```
srcdirs /usr/src/gnu/usr.bin
```

```
# sources for ns
```

```
srcdirs /usr/src/release/picobsd/tinyware
```

```
libs -lutil
```

```
libs -lm
```

```
libs -lnetgraph
```

```
libs -ledit -lcrypt -lradius
```

```
libs -lcurses -ltermcap -lgnuregex
```

```
libs -lkvm -lz -lmd
```

```
libs -lipsec -lwrap -lalias -lcrypto -lpcap
```

```
# picoBSD
```

```
progs sps ns
```

```
# /bin
```

```
progs kill ls mkdir hostname #cat
```

```
progs ln rm sh test
```

```
progs sleep cp
```

```
# /sbin
```

```
progs mount
```

```
progs init
```

```
progs ifconfig ping natd #route
```

```
progs ipfw
progs newfs sysctl

# /usr/sbin
progs ppp dev_mkdb pwd_mkdb syslogd
progs pccardc pccardd

ln test [
ln sh -sh
ln sh -u
ln sps ps
ln ns netstat
ln newfs mount_mfs
```

crunchgen を実行する。

```
# crunchgen crunch.conf
```

Run "make -f crunch.mk" to build crunched binary.

上の様に表示されるので、その通りに make を実行する

```
# make -f crunch.mk
```

作成される実行ファイル名は設定ファイルから.conf サフィックスを取り除いたものになる。この場合は、crunch である。

5 カーネル

以下のファイルを使用してカーネルを構築する。

options MD_ROOT を必ず有効にして、MD_ROOT_SIZE を無効にする。

リスト 4: コンフィグレーションファイル

```
#
# note-router
#
machine                i386
#cpu                   I386_CPU
cpu                    I486_CPU
cpu                    I586_CPU
#cpu                   I686_CPU
ident                  note-router
maxusers               0

options                INET                #InterNETworking
options                FFS                #Berkeley Fast Filesystem
options                FFS_ROOT           #FFS usable as root device [keep this!]
options                MFS                #Memory Filesystem
options                MD_ROOT            #MD is a potential root device
options                PROCFS            #Process filesystem
options                COMPAT_43         #Compatible with BSD 4.3 [KEEP THIS!]
options                UCONSOLE         #Allow users to grab the console
options                ICMP_BANDLIM     #Rate limit bad replies
options                TCP_DROP_SYNFIN
options                IPSTEALTH

device                 isa
device                 pci

# Floppy drives
```

```

device          fdc0          at isa? port IO_FD1 irq 6 drq 2
device          fd0           at fdc0 drive 0
#

# atkbd0 controls both the keyboard and the PS/2 mouse
device          atkbd0        at isa? port IO_KBD
device          atkbd0        at atkbd? irq 1 flags 0x1

device          vga0          at isa?

# syscons is the default console driver, resembling an SCO console
device          sc0           at isa? flags 0x100

# Floating point support - do not disable.
device          npx0          at nexus? port IO_NPX irq 13

# PCCARD (PCMCIA) support
device          card
device          pcic0         at isa? irq 0 port 0x3e0 iomem 0xd0000
device          pcic1         at isa? irq 0 port 0x3e2 iomem 0xd4000 disable

# Serial (COM) ports
device          sio0          at isa? port IO_COM1 flags 0x10 irq 4

# PCI Ethernet NICs that use the common MII bus controller code.
# NOTE: Be sure to keep the 'device miibus' line in order to use these \
#       NICs!
device          miibus        # MII bus support

# ISA Ethernet NICs.
# 'device ed' requires 'device miibus'
device          ed

# Pseudo devices - the number indicates how many units to allocate.
pseudo-device   loop          # Network loopback
pseudo-device   ether         # Ethernet support
pseudo-device   tun           # Packet tunnel.
pseudo-device   md            # Memory "disks"

# for ipfirewall
options         IPFIREWALL
options         IPFW2
options         IPFIREWALL_VERBOSE
options         IPFIREWALL_VERBOSE_LIMIT=100
options         IPDIVERT
options         IPFIREWALL_DEFAULT_TO_ACCEPT

options         NETGRAPH
options         NETGRAPH_ETHER
options         NETGRAPH_PPPOE
options         NETGRAPH_SOCKET

```

6 FD 起動後の root filesystem の作成

フロッピーから起動後、init により / (root) としてマウントされるファイルシステムのディスクイメージを作成する。

6.1 ディスクイメージの作成

仮想ディスクデバイス化機能を利用する。

1. 作業ディレクトリに戻る

```
# cd ~/fdbsd
```

2. 1.44MB FD のサイズの、中身が 0 なファイルを作る

```
# dd if=/dev/zero of=rootfs.img count=1440 bs=1024
```

3. 仮想デバイスファイルに結びつける

```
# vnconfig -s labels -c /dev/rvn0 rootfs.img
```

4. ディスクラベルを書き込む

```
# disklabel -wBr vn0 fd1440
```

5. ufs にフォーマット

```
# newfs -i 4000 -o space -m 0 /dev/rvn0c
```

6. 作成した仮想ディスクをマウント

```
# mount /dev/vn0c /mnt
```

以上で、仮想ディスクが出来る。/mnt で書き込んだ内容は、rootfs.img に反映される。

6.2 ディレクトリ配置

必要なディレクトリ、シンボリックリンクを作成

ルートパーティションには、/bin, /sbin, /etc, /dev は必須である。

リスト 5: — ディレクトリ作成スクリプト —

```
#!/bin/sh
```

```
cd /mnt
```

```
mkdir -p etc bin dev usr var tmp
```

```
ln -s bin sbin
```

```
for i in usr/bin usr/sbin usr/libexec
```

```
do
```

```
    ln -s ../bin $i
```

```
done
```

6.3 デバイスファイルの作成

リスト 6: — デバイス作成スクリプト —

```
#!/bin/sh

cd /mnt/dev
sh /dev/MAKEDEV std fd0 ttyd0 tun0 card0 card1

mv fd0.1440 ../
mv rfd0.1440 ../
rm fd0.* rfd0.*
mv ../fd0.1440 .
mv ../rfd0.1440 .

for i in a b d e f g h
do
    rm rfd0$i
done
```

6.4 クランチバイナリの配置

リスト 7: — コマンド作成スクリプト —

```
#!/bin/sh

mkdir -p /mnt/bin
cp ../build/crunch /mnt/bin
command_list='crunchgen -l ../crunch.conf'

cd /mnt/bin

for i in $command_list
do
    ln -s crunch $i
done
```

6.5 /etc の設定ファイル

下に示す点に注意する。

- services, protocols は必要なもの以外は削る
- init を使用する場合は、起動の手順を rc に全てまとめる
- /var, /tmp は mfs に割り当てる
- パスワード検索用のバイナリファイルは起動後に pwd_mkdb で作成
- pccard の認識は時間がかかるので、sleep でタイミングを調節する
- login を使わずに、直接 sh を起動する

リスト 8: — /etc/rc —

```

#!/bin/sh

HOME=/
PATH=/sbin:/bin:/usr/sbin:/usr/bin

mount -a
mount_mfs -s 16384 -T minimum dummy /var
mount_mfs -s 16384 -T minimum dummy /tmp

cd /var
mkdir -p log
mkdir -p db
mkdir -p run
mkdir -p tmp
mkdir -p spool/lock
cd -

cp /etc/master.passwd /var/tmp
pwd_mkdb -d /var/tmp /var/tmp/master.passwd
pwd_mkdb -d /var/tmp -p /var/tmp/master.passwd
ln -s /var/tmp/pwd.db /etc/pwd.db
ln -s /var/tmp/spwd.db /etc/spwd.db

sysctl net.inet.ip.forwarding=1

sleep 10
pccardc pccardmem 0xd0000
pccardd -f /etc/defaults/pccard.conf && echo -n ' pccardd'

sleep 15
hostname xxx.***.org
ifconfig lo0 inet 127.0.0.1 netmask 0xffffffff00
sleep 10
ppp -ddial provider
sleep 10
ifconfig ed1 inet 192.168.1.1 netmask 0xffffffff00

natd -f /etc/natd.conf -n tun0

dev_mkdb
. /etc/ipfw.nat

syslogd -s

sh

```

リスト 9: — /etc/fstab —

/dev/md0c	/	ufs	rw	1	1
-----------	---	-----	----	---	---

リスト 10: — /etc/ppp/ppp.conf —

```

default:

provider:
set device PPPoE:ed0

```

```
set MRU 1454
set MTU 1454
accept PAP
deny CHAP
set dial
set login
set ifaddr 10.0.0.1/0 10.0.0.2/0
add default HISADDR                # Add a (sticky) default route
set timeout 180                    # 3 minute idle timer (the default)
enable dns
set authname xxx@***.xxx.jp
set authkey xxxxxxxx
```

リスト 11: — /etc/defaults/pccard.conf —

```
io          0x240-0x360
irq         3 5 10 11 15
memory      0xd4000 96k

# Planex FNW-3700-T Fast Ethernet
card "Fast Ethernet" "16-bit PC Card"
    config      auto "ed" ? 0x30000
    logstr      "Planex FNW-3700-T"
    insert      /etc/pccard_ether $device start
    remove      /etc/pccard_ether $device stop

# I-O DATA PCLA/TE
card "IO DATA" "PCLATE"
    config      auto "ed1" ?
    insert      /etc/pccard_ether $device start
    remove      /etc/pccard_ether $device stop
```

リスト 12: — 設定ファイルの格納 —

```
# rsync -au --exclude=CVS --delete ../etc/ /mnt/etc/
# chown -R root:wheel /mnt/
```

6.6 アンマウント

マウントしたディスクイメージでの作業が終了したら必ず `umount` する。そうしないと `root filesystem` が `NOT CLEAN` になり、起動時に `mount` 出来なくなる。

```
# umount /mnt
```

6.7 フロッピーディスクの作成

```
# fdformat /dev/fd0.1440
# disklabel -B -r -w fd0 fd1440
# newfs -c 1 -i 131072 -o space -m 0 /dev/rfd0.1440 fd1440
# mount /dev/fd0c /floppy
```

ディレクトリを作り、ローダ loader を kzip してインストールする。

```
# mkdir /floppy/boot
# kzip -o /floppy/boot/loader /boot/loader
```

ローダ設定ファイル boot/loader.rc を以下のような内容で作成する。

リスト 13: /boot/loader.rc

```
load /kernel
load -t mfs_root /mfsroot
autoboot 3
```

上の記述で、/kernel のほかに、mfs_root というタイプにタグ付けされたモジュールを読み込むようになる。mfs_root というタグ付けにより、カーネルは mfsroot(.gz) が MemoryDisk のイメージであると判断する。

次に、作成したカーネルと MFS root filesystem ディスクイメージをコピーする。カーネルも root ファイルシステムイメージも gzip で圧縮する。/boot/loader が gzip されたイメージも正常に読み込んでくれる。

```
# cd ~/fdbsd
# gzip -9c kernel > /floppy/kernel.gz
# gzip -9c rootfs.img > /floppy/mfsroot.gz
# umount /floppy
```

7 参考文献

1. FreeBSD 4.7 で 1FD Router¹

¹<http://www.abk.nu/~katty/1fdrt.htm>

第II部

C科3年実験とtexとその他

(著者) 9920004 安部 卓哉
abe@mma.club.uec.ac.jp

概要

1年生の皆様始めまして。と出だしだけ新歓ムードを醸し出しておきますが、この文章はC科の新3年生のうち「3年実験は来年でもいいや」とか比較的投げやりな人に向けた積極的にネガティブな文章です。初々しさやヤル気に溢れた新入生の皆さんは読んではいけません。比較的速やかに読み飛ばしてください。なお、ネガティブな新3年生においても、去年の実験と今年の実験が全く同じではないだけでなく、ワタシという比較的つくりの悪いフィルターを通して得られた質の悪いジャンクな情報であるという認識の元に読んでください。

8 3年実験とは

物理学年²が3に到達すると履修する事の出来る/しなくてはならない単位であり、卒業する事を目標とするならば避ける事のできない検問の一つらしい。

9 実験が始まるまでにやる事

例年通りであれば履修申告は通常の単位とは異なり履修申告システム³ではなく担当教官が一括して履修申告をしてくれる。しかし掲示板に指定されている日時に行われる説明会に出席しなくてはならない。説明会に出席し忘れた人は掲示板に指定されている通りに行動してください。

それから、やっておく事が望ましい事としてはCCのアカウントを復活させておく事なんかがあげられます。もし復活が間に合わなくても当日担当教官が教官権限で復活させてくれるので問題はありますが、実験の進行の妨げとなる可能性があ(略

その他、他の単位/人生全体でもいえる事ですが、自分が峠を越えた位置にいる人間では無いという自覚のある人は、友達を減らさない方向で生きる方が楽です。

10 ルール

1. 必ず全て出席。
2. 必ず全て提出。
3. ブレッドボードが机に置いてある某実験では、2週目以降、実験前にばっちり実験事項をまとめる。
4. 計算機室で実験な日でも某ちゃんねるなんかを読み耽らない。
5. 凝らない。
6. ワタシは諦めない。

²現在の年度から入学年度を引いて1を足した物。対義語:論理学年

³今年度から web システムに移行するらしい...

11 ワタシのハマった罫

11.1 回路シミュレーション

この実験はCCで行われます。実験で用いる cadence 社製の Analog Work Bench⁴を使う為には、デフォルトの.cshrc に書かれている、

```
source /opt/CCedu/skel/cshrc.sun
```

をコメントアウトしている場合は元の状態に戻しておく必要があります。ワタシは何も考えずコメントアウトしていた為 awb を起動できずに多大なるご迷惑を(略

その他に実験手引書で触れられていないと思われるワタシがハマった罫としては、awb は Printer を直接指定して印刷するように出来ているようで、CCの第二演習室から起動して設定を変更せずに印刷すると、第一演習室のプリンターにひたすら出力されつづけるという楽しげな現象が起こるようです。出力する Printer を変更するには、awb を起動して最初にでる window の Utility というドロップダウンメニューの Plot Setup をいじると良いようです。

11.2 情報通信

情報通信は小グループ制の実験であり、そのグループ毎に難易度・レポートの作業量共に激しく大きく異なるギャンプル性の高い実験です。ワナとしか思えないグループもありますが、耐えましょう。

12 tex を使う上での注意点

12.1 ied の tex 環境

なんか作りかけて放置されてるみたいでちゃんと使えませんね。CCかどこかの tex 環境を使いましょう。

12.2 音声・画像実験の画像処理の imgview3

実験用コマンド imgview3 は表示している画像を直接印刷する機能を持っています。実際 strings すると、"cat %s | lp"なんて文字列が入ってるようです。しかし、その画像を img 形式以外で保存したりする機能は無い(又はあっても実験手引書には載っていない。)為、自分でどうにかする必要があります。ワタシは xwd で xwd 形式にしてそれを xwdtopnm で pnm 形式に変換して、それを xv で eps に変換しました。

12.3 手書き指定

回路シミュレーションとアナログ回路の二つはボールペンで手書きする事が義務付けられています。いくら言われてもWORDで製作したと思しき文書を提出しつづけた強者もいましたが、素人にはお勧めではない気がします。

13 諦めない

諦めない事が重要です。逆に諦めなければどうにかかります。では皆さん一年間諦めないでください。さようなら。

⁴コマンド名:awb

第 III 部

実数の公理と、 ε - δ 論法による極限の定義

(著者) 仲田将之

enu@mma.club.uec.ac.jp

概要

この冬から春休みにかけて、“イプシロン-デルタ⁵” を 4 回くらい読んだらちょっと分ってきたように感じたので、本当に理解しているか説明をしてみようと思う。さらに、最近は“解析入門⁶” を読み始めたのでそれについても説明してみたい。

某隣国では“理数科高校” 3 学年の教科書“数学 III” に ε - δ から微分方程式、線形代数まで載っているそうである。ただし、詳しい証明などは載っていないらしいので、大学の数学科で教えられているような程度とは違うが、公式などをそのまま認めて論理を駆使して問題を解くためには使える道具が色々あるので便利だろう。ここで、“ ε - δ なんて問題を解くには不必要だ” と言われるかもしれないが、

$$x_n \rightarrow a \implies \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow a \quad (1)$$

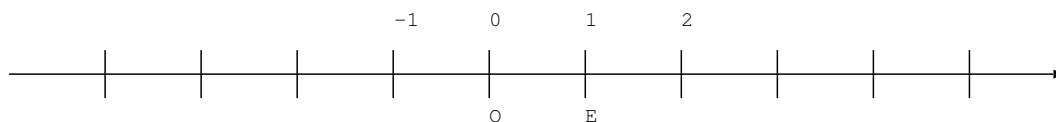
などの問題を \lim で解こうとしても解けないので、試験の問題として出されたら困り果ててしまう。この種の問題を解かせるため、教えているのだろう。

14 有理数と無理数と実数と

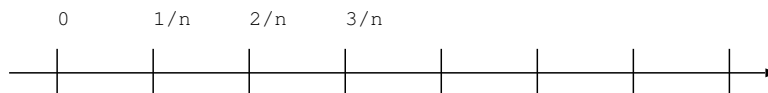
さて解析学は、有理数を既知の大前提として、実数論を基礎にします。実数論は有理数論を前提にして成り立っているので有理数が分っていなければ、実数を詳しく調べられません。そこでまず、有理数がどんな性質を持っているかを見てみましょう。

14.1 有理数の稠密性

数直線を書いてみれば分かるように整数というのは、数直線上に 0 と 1 を距離の単位としてその左右に等間隔に点を並べたものです。



また、自然数 n を定めて、 $\frac{m}{n}$, (m は整数) なる有理数も $\frac{1}{n}$ の間隔で並んでいます。



n を大きくすれば間隔 $\frac{1}{n}$ はいくらでも狭められるので、 $r < s$ なる 2 つの有理数 r, s をどの様にとっても、 $r < a < s$ なる有理数 a が無数にある、と言える。何となれば、 $\frac{r+s}{2}$ などが確かに $r < s$ の間に存在するので、これを有理数の集合は到る所で稠密だと言う。

⁵ 田島一郎著 “数学ワンポイント双書 イプシロン-デルタ” 共立出版より；名著と言われる解析入門の著者による ε - δ 論法のドリルと解説の書

⁶ 小平邦彦著 “解析入門” 岩波書店より；日本初のフィールズ賞受賞者であり多様体論の厳父と言われる著者が高校数学から現代数学への橋渡しとして、精密にしかし感覚的に分りやすく書いた本。彼が確立した複素多様体論は理論物理の基礎をなしているという。なお、小平邦彦著 “複素多様体論” は岩波により絶版となっている。

10進法を使えば、有理数は有限小数、または、循環する無限小数で表示される。何となれば、 $\frac{m}{p}$ (m は有理数、 p は自然数) なる有理数とすると、 m を p で割り、その商 k と余り r_1 を求める。 $10r_1$ を p で割り、商 k_2 と余り r_2 を求める。これを同様に繰り返して、無限小数

$$k.k_1k_2 \cdots k_n \cdots = k + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} + \cdots \quad (2)$$

で表示される。この余り $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ は $0 \leq r_n \leq p-1$ なので p 個の余りには少なくとも2個の重複があり、だから循環する。

14.2 無理数を10進小数で表示する

$\sqrt{2}$ は $\frac{m}{n}$ (m は整数、 n は自然数) なる有理数で表わせない⁷ ので有理数でない実数、つまり無理数だから

$$1 < \sqrt{2} < 1 + 1 \quad (3)$$

$$1 + \frac{4}{10} < \sqrt{2} < 1 + \frac{4+1}{10} \quad (4)$$

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} < \sqrt{2} < 1 + \frac{4}{10} + \frac{1+1}{10^2} \quad (5)$$

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots < \sqrt{2} < 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \quad (6)$$

$$(7)$$

のような有理数で挟んでいけば、循環しない無限小数

$$\sqrt{2} = 1.41421 \cdots \quad (8)$$

を得る。つまり全ての無理数を循環しない無限小数で表わせる。

14.3 有理数列の極限としての無理数

$\sqrt{2}$ の例で見たように、無理数 α を定めれば

$$a_n < \alpha < a_n + \frac{1}{10^n}, \quad (a_n = k.k_1k_2k_3 \cdots k_n) \quad (9)$$

なる有理数列 $\{a_n\}$ を全ての $n = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ で成りたつように定めていけば循環しない無限小数表示を得る。この結果から、無理数は有理数列で両側から挟み撃ちにされて一点に固定されている事がわかる。逆に無理数は有理直線を二つの集合に切断していることが分かる。

さらに小平氏は言う、

このように任意の実数を10進小数で表わせる。それでは逆に、任意の10進小数は必ず一つの実数を表わすだろうか。高校数学では循環しない無限小数

$$\alpha = k.k_1k_2k_3 \cdots \quad (10)$$

なる実数 α が存在することを当然のこととして認めてきた。すなわち、小数 $n+1$ を切り捨てて得られる有限小数を

$$a_n = k.k_1k_2k_3 \cdots k_n \quad (11)$$

とすれば、不等式:

$$a_n < \alpha < a_n + \frac{1}{10^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad (12)$$

⁷ピタゴラスは有理数のみを考えていたが、 $\sqrt{2}$ が有理数で表わせない事を証明したが長い間秘密にされた。宗教的な問題とされているが、ガウスが虚数の研究を隠していたように、数の拡張に関する世間的な問題だったのかもしれない。

が全て成りたつような実数 α が存在することを認めてきたのである。数直線上で考えれば、全ての $n = 1, 2, 3, \dots$ について、点 a_n と点 $a_n + \frac{1}{10^n}$ の間に入る点 α が存在することを意味する。実数 α の存在を示すためには、数直線上にこのような点 α が存在することを証明しなければならない。このためには直線とは何なるものなのかが明らかでなければならない。ここに到って我々は高校数学が直線の明確な定義に、したがってまた実数の明確な定義が欠けていたことに気がつくのである。⁸

14.4 無理数についての素朴な疑問

有理数は数直線上に稠密だが、無理数はその隙間に無数に存在する。何となれば、有理数 r を任意に与えれば

$$\sqrt{2} + r \quad (13)$$

も無理数であるから稠密。さらに

$$\sqrt{3} + r \quad (14)$$

もまた無理数であり稠密。しかも $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ もまた無理数だから、任意な有理数 r と無理数 $\sqrt{2} + r, \sqrt{3} + r$ はただ一つの点も共有しない。つまり、有理直線には到る所に穴がある。

14.5 10進小数表示は実数か

ここで、10進小数表示と実数との関係はどのようなものだろうか。何となれば、

$$1 = 0.9999999 \dots \quad (15)$$

は10進小数表示としては異なるが同じ数だから、このような実数には2通りの表示がある。無理数論や実数論については文献を参照してほしい。

14.6 実数の定義

最後に、デデキントにしたがった実数の定義を述べてみる。⁹

有理直線 \mathbb{Q} を次の2条件を満たし、空集合でない2つの部分集合 A と A' に分割したとき、 A と A' の組を有理数の切断とよび、記号 $\langle A, A' \rangle$ と書く：

1. $r \in A, s \in A' \longrightarrow r < s$
2. A に属する、最大の有理数は存在しない

定義 有理数の切断を実数とよぶ。

実数 $\langle A, A' \rangle$ を α で表わしたとき、 $\alpha = \langle A, A' \rangle$ と書く。

15 極限と無限と ε - δ 論法と

15.1 円周率は有理数か

何年か前に、受けさせる義務の方の“義務教育”の話題で今度から学校では π を約3と教えるとか、それに対して親などからは3.14と教えるべきだなどというのがあったと思うが、誰も π を有限桁でちょんぎっているこ

⁸解析入門 P.8 より。一部を編集した。

⁹デデキントが連続の公理を発見したのは、1858/11/24の事である。日本では安政の大獄が真最中だったときの事である。

とには関心がないようだ。本来なら π は無理数なのだから $3. \dots$ とか $3.14 \dots$ などと表記するのが妥当だろう。また、 π が無理数であることの証明を知らない人は稀だろうか。おそらく殆どの数学者も知らないのではないかと思う。実際、小平氏も知らなかったと告白している¹⁰。しかし、知らないことと、知ったようなこととは明らかに違う。

15.2 高校数学の言葉では

“収束” を高校数学では “限りなく近づく” と説明している。それでは限りなくとはなんだろうか。

$$1 + \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots) \tag{16}$$

これは限りなく 1 へ近づいているようだが、0 へも全ての n で近づいているから限りはない。

$$0.1 + \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots) \tag{17}$$

これも確かに 0 へ近づいているようだ。

$$0.0000001 + \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots) \tag{18}$$

これも確かに 0 へ近づいているようだ。

$$0.00000000000000000001 + \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, n, \dots) \tag{19}$$

これも確かに 0 へ近づいているようだ。

このように確かに “ n に対応して限りなく近づいている” が、なぜか、まだそれより近い点がある。したがって “限りがない” を “距離” という概念を使って明確にしなければ、意味をなしません。

15.3 極限の定義

したがって、これが数列が収束するという定義です。

定義 数列 $\{a_n\}$ が与えられたとし、 α を一つの実数とする。正の実数 ε を任意に与えると、それに対応して自然数 $n_0(\varepsilon)$ が定まって

$$n > n_0(\varepsilon) \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{20}$$

となるとき、 $\{a_n\}$ は α に収束する、また、 α は $\{a_n\}$ の極限である、あるいは極限值であるといい

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \tag{21}$$

と書く。

これを説明すれば、どんな距離 ε , (> 0) を指定しても、それに応じて有限個の項 (a_1, a_2, \dots, a_n) を除いた全ての項 a_n がその距離より近くにある、ということ。

この説明の、高校数学での説明との違いは、“限りなく” という無限大や無限小を意味する言葉と “近さ” という概念を使う代わりに、有限な実数による距離と、有限な自然数を使うこと。

15.4 例題

例題 以下を証明せよ:

$$x_n \longrightarrow a \implies \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \longrightarrow a. \tag{22}$$

¹⁰小平邦彦編数学の学び方 P.80

解答例 仮定 “ $x_n \rightarrow a$ ” により、正の実数 ε を任意に与えると、それに応じて自然数 $m_0(\varepsilon)$ が定まり、 $n > m_0(\varepsilon)$ のとき、

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (23)$$

また、 ε が与えられれば、それに応じて自然数 $m_1(\varepsilon)$ が定まり、 $n > m_1(\varepsilon)$ のとき、

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{m_0(\varepsilon)} - m_0(\varepsilon)a}{n} \right| < \varepsilon \quad (24)$$

となる。

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_0(\varepsilon/2)} + x_{m_0(\varepsilon/2)+1} + \cdots + x_n}{n} - a \right| \\ & \leq \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_0(\varepsilon/2)} - m_0(\varepsilon/2)a}{n} \right| + \left| \frac{x_{m_0(\varepsilon/2)+1} + x_{m_0(\varepsilon/2)+2} + \cdots + x_n - (n - m_0(\varepsilon/2))a}{n} \right| \\ & \leq \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_0(\varepsilon/2)} - m_0(\varepsilon/2)a}{n} \right| + \frac{|x_{m_0(\varepsilon/2)+1} - a| + |x_{m_0(\varepsilon/2)+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \end{aligned} \quad (25)$$

したがって $n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon/2) + m_1(\varepsilon/2)$ とおけば、正の実数 ε を任意に与えると、自然数 $n_0(\varepsilon)$ が定まり、 $n > n_0(\varepsilon)$ のとき、

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + \cdots + x_n}{n} - a \right| < \varepsilon \quad (26)$$

となる。

もっと簡単に解けますが、全部展開したので長くなってしまいました。

15.5 おまけ

以下は証明になっていません。何となれば、まず $0.999\cdots$ が 1 に収束することを証明しなくては、加減乗除を行なえないからです。

$x = 0.999\cdots$ とすると $x * 10 = 9.99\cdots$ なので

$$x * 10 - x = 9.99\cdots - 0.999\cdots \quad (27)$$

$$x * 9 = 9 \quad (28)$$

$$x = 1 \quad (29)$$

よって $0.999\cdots = 1$

16 参考文献

1. 数学ワンポイント双書 20 イプシロン-デルタ 著:田島一郎
2. わかる イプシロン-デルタ 著:細井勉
3. 解析入門 著:小平邦彦
4. 数学の学び方 編:小平邦彦
5. 幾何への誘い 著:小平邦彦
6. 近世数学史談 & 数学雑談 著:高木貞治
7. グロタンディーク - 数学を超えて 著:山下純一
8. 数学の最先端 - 21 世紀への挑戦 3, 4 編:M. アティア